Divisione fra zeri

Si era visto precedentemente che, dato un numero N:

$$\frac{0}{N} = 0 \qquad\qquad \frac{0}{N} \text{ non è definito}$$

da cui discende il fatto che gli zeri di una funzione razionale sono le radici del numeratore, mentre il campo di esistenza esclude le radici del denominatore.
Le due regole entrano in contraddizione se si deve calcolare $0/0$. Il risultato è comunque non definito, ovvero lo zero del denominatore "prevale" su quello del numeratore. Allo stesso modo, le codizioni di esistenza prevalgono sugli zeri, in caso di radici comuni. Ecco un esempio di valutazione che porta un risultato $0/0$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad\qquad f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{non definito}$$

Si era visto nella precedente UdA che il limite nel caso di una divisione per 0 sia infinito, dando per scontato di non trovarsi al caso $0/0$ che, come si vedrà in seguito, è una forma indeterminata che può dare vari risultati.

Radici comuni di molteplicità singola

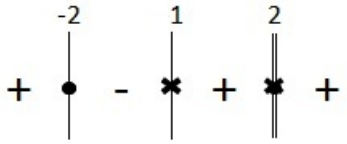
Nella precedente UdA non era stato mai preso in considerazione il caso di radici comuni a numeratore e denominatore. In questo paragrafo ci si limiterà al caso in cui la molteplicità della radice comune è singola. Nello scema dei segni la radice avrà molteplicità doppia (le molteplicità vengono sommate) e in corrispondenza di essa si mettono entrambi i contrassegni. Come già detto nel paragrafo precedente, le condizioni di esistenza prevalgono sugli zeri: pertanto questi ultimi sono le radici del solo numeratore, mentre dalle CdE si escludono le radici del denominatore (che siano o no anche radici del numeratore). Per quanto riguarda i limiti per tali valori, se per le radici del solo denominatore il limite è infinito, per quanto riguarda le radici comuni, il limite può essere calcolato dopo aver semplificato la funzione, sostituendo nella funzione semplificata la radice comune. Il grafico passerà da tale limite, ma proprio in corrispondenza di esso si trova un "buco" (indicato da una crocetta): ci si trova di fronte ad una discontinuità "eliminabile" visto che basterebbe riempire tale buco per avere un grafico continuo (non si puó fare in corrispondenza delle radici del solo denominatore, quando il limite è infinito).

Ecco un esempio

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \qquad f(0) = \frac{-4}{2} = -2 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

+		R	M
$x+2$	N	-2	1
$x-2$	N	2	1
$x-1$	D	1	1
$x-2$	D	2	1



CdE: $x \neq -1 \quad x \neq 2$ Zeri: $x = -2$

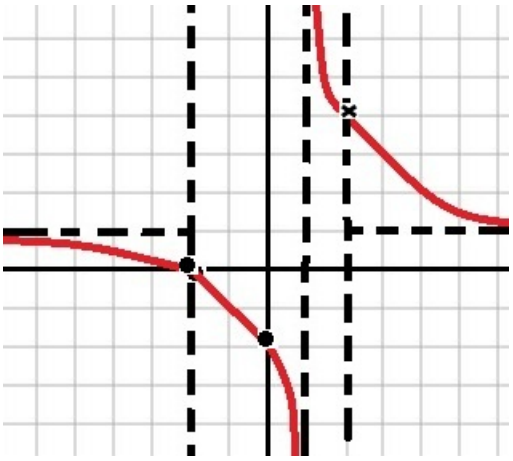
Bisogna a questo punto calcolare il limite per la comune radice 2: dalla funzione scomposta viene eliminato dal numeratore e dal denominatore il comune fattore $(x-2)$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-1)} = \frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

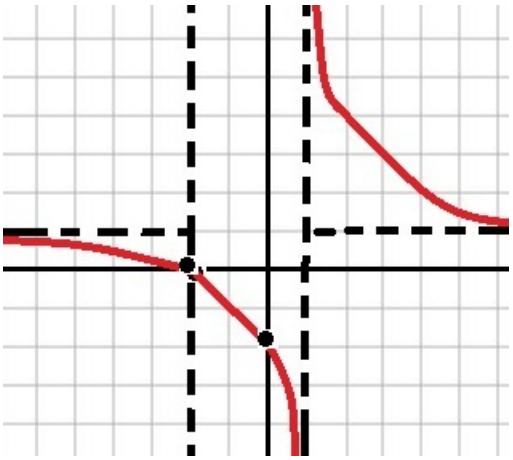
A questo punto si scrivono le informazioni necessarie a disegnare il grafico:

$$f(-2) = 0 \quad f(0) = -2 \quad \lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to 2} f(x) = 4 \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$$



Ecco come sarebbe invece il garfico della funzione semplificata, quella attraverso la quale è stato calcolato il limite. Si può notare che l'unica deiiferenza è proprio il "buco" in corrispondenza del valore di indeterminatezza.

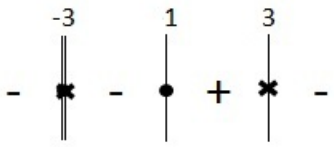


Altri due esempi, intervallati dalle rispettive rappresentazioni grafiche.
Per il calcolo del limite per la radici comune, va notato che, rispetto alla funzione scomposta si elimina solo la coppia di fattori comuni, trattenendo tutto il resto (compreso il segno negativo davanti e la costante moltiplicativa, inunfluente per lo studio del segno).
Da notare che nel secondo esempio, la comune radice 0 ha molteplicità 2 sia al numeratore che al denominatore: nulla cambia, la molteplicità complessiva è 4, dunque pari, e in corrspondenza di essa il segno non cambia.
Nessuna novità anche per la semplificazione: di fatto, quanto visto finora, vale non solo per le radici comuni di molteplicità singola, ma vale sempre se la comune radice ha la stessa molteplicità.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x - 9}{-x^2 + 9} \qquad f(0) = \frac{-9}{9} = -1 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -3$$

$f(x) = -\frac{3(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-3)}$

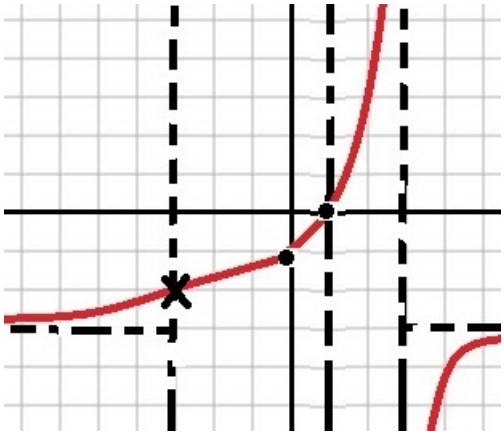
–		R	M
$x+3$	N	-3	1
$x-1$	N	1	1
$x-3$	D	3	1
$x+3$	D	-3	3

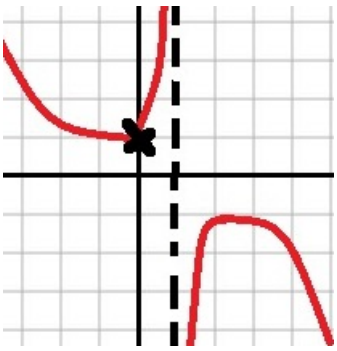


CdE: $x \neq \pm 3$ Zeri: $x = 1$

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{3(x-1)}{(x-3)} = -\frac{3\cdot(-3-1)}{-3-3} = -\frac{3\cdot(-4)}{-6} = -2$$

$$\lim_{x\to-3} f(x) = -2 \qquad f(0) = -1 \qquad f(1) = 0 \qquad \lim_{x\to3^{\mp}} f(x) = \pm\infty\infty$$

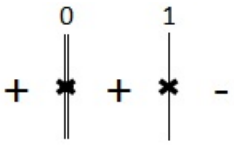




$$f(x) = \frac{-x^4 - x^2}{x^3 - x^2} \qquad f(0) = \frac{0}{0} \text{ non definito} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$f(x) = -\frac{x^2(x^2+1)}{x^2(x-1)}$

–		R	M
x	N	0	2
x	D	0	2
$x-1$	D	1	1



CdE: $x \neq 0 \quad x \neq 1$ Zeri:nessuno

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} -\frac{(x^2+1)}{(x-1)} = -\frac{(0^2+1)}{(0-1)} = -\frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to1^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \pm\infty$$

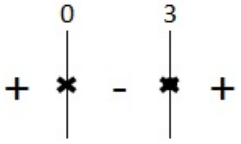
Radici comuni avente molteplicità superiore al numeratore

Ecco un esempio: in questo caso, avente la radice comune molteplicità 2 al numeratore e 1 al denominatore, la molteplicità complessiva è 3 pertanto, essendo dispari, il segno cambia in corrispondenza di esso.

$$f(x) = \frac{-x^2+6x-9}{-x^2+3x} \qquad = \frac{-9}{0} \text{ non definito} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x-3)}$

+		R	M
$(x-3)^2$	N	3	2
x	D	0	1
$x-3$	D	3	1



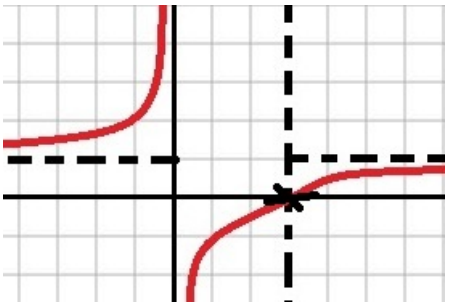
CdE: $x \neq 0 \quad x \neq 3$ Zeri:nessuno

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x} = \frac{3-3}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

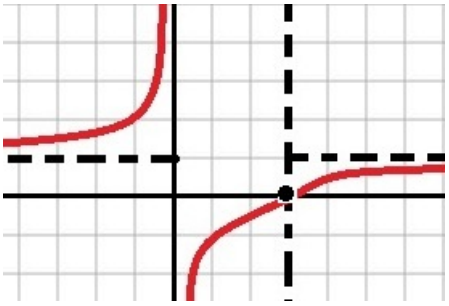
Il limite alla forma indeterminata sarà sempre 0 in questa situazione: questo perché semplificando, la comune radice scompare al denominatore (dove la molteplicità è inferiore) ma rimane al numeratore (dove la molteplicità è superiore), quindi nella funzione semplificata diventa uno zero (radice del solo numeratore).

$$\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 3^{\pm}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

Ecco la rappresentazione grafica



Ecco come sarebbe invece il garfico della funzione semplificata, quella attraverso la quale è stato calcolato il limite. Come nel caso in cui le radici hanno la stessa molteplicità, l'unica differenza sta nel "buco" che in questo caso (al contrario di quanto avviene nel caso precedente) giace a quota zero.

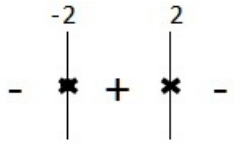


Altri due esempi, intervallati dalle rispettice rappresentazioni grafiche. Alla luce dell'ultima considerazione, il limite per la forma indeterminata verrà scritto direttamente 0.

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{-x^2 + 4} \qquad f(0) = \frac{4}{4} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -1$$

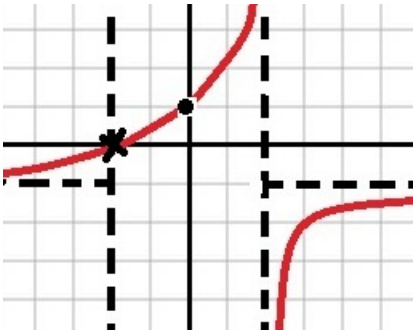
$f(x) = -\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$

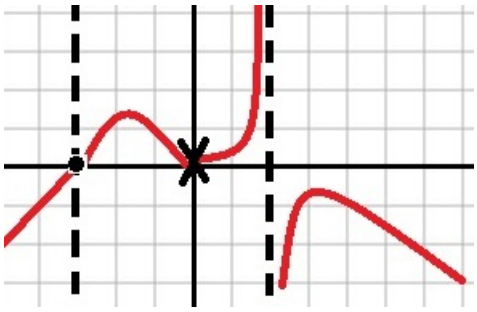
$-$		R	M
$(x+2)^2$	N	-2	2
$x+2$	D	2	1
$x-2$	D	-2	1



CdE: $x \neq \pm 3$ Zeri:nessuno

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 0 \qquad f(0) = 1 \qquad \lim_{x \to 2^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -1$$

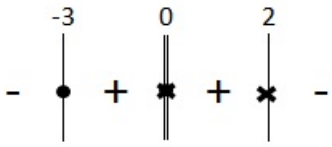




$$f(x) = \frac{-2x^4 - 6x^3}{x^2 - 2x} \qquad f(0) = \frac{0}{0} \text{ non definito} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$f(x) = -\frac{2x^3(x+3)}{x(x-2)}$

$-$		R	M
x^3	N	0	3
$x+3$	N	-3	1
x	D	0	1
$x-2$	D	2	1



CdE: $x \neq 0 \quad x \neq 2$ Zeri: $x = -3$

$$f(-3) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 2^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Da notare che la molteplicità della radice 0 è, in questo caso, 4 (3 al numeratore e 1 al denominatore), pertanto il segno permane in corrispondenza di tale radice.

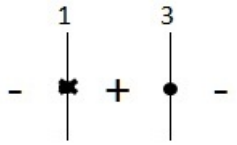
Radici comuni avente molteplicità superiore al denominatore

Ecco un esempio:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{-x^2 + 2x - 1} \qquad f(0) = \frac{3}{-1} = -3 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -1$$

$$f(x) = -\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)^2}$$

+		R	M
$x-3$	N	3	1
$x-1$	N	1	1
$(x-1)^2$	D	1	2



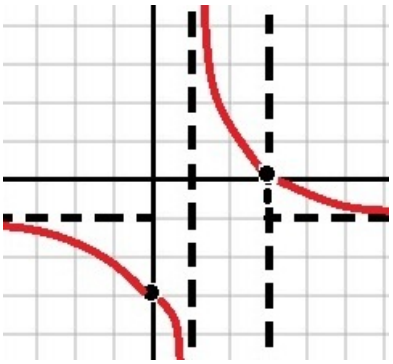
CdE: $x \neq 1$ Zeri: $x = 3$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} -\frac{(x-3)}{(x-1)} = -\frac{1-3}{1-1} = -\frac{-2}{0}$$

Scritto così il limite risulta non definito ma, a livello di limite, quando si divide per 0 il limite è infinito.
Anche in questo caso il limite alla forma indeterminata sarà sempre ∞ in questa situazione: questo perché semplificando, la comune radice scompare al numeratore (dove la molteplicità è inferiore) ma rimane al denominatore (dove la molteplicità è superiore), quindi nella funzione semplificata rimane un valore fuori dal campo di esistenza (radice del solo denominatore).

$$f(0) = -3 \qquad \lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty \qquad f(3) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -1$$

Ecco la rappresentazione grafica



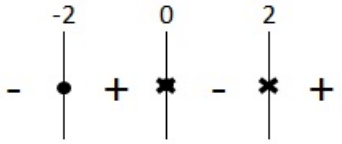
Questa volta, al contrario dei casi precedenti, non ci sono discontinuità eliminabili, in quanto la comune radice sarebbe un punto di non definizione anche se nella funzione semplificata: quest'ultima e l'originale sono del tutto equivalenti.

Altri due esempi, intervallati dalle rispettice rappresentazioni grafiche. Alla luce dell'ultima considerazione, il limite per la forma indeterminata verrà scritto direttamente ∞.

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x}{-x^3 + 2x^2} \qquad f(0) = \frac{0}{0} \text{ non definito} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

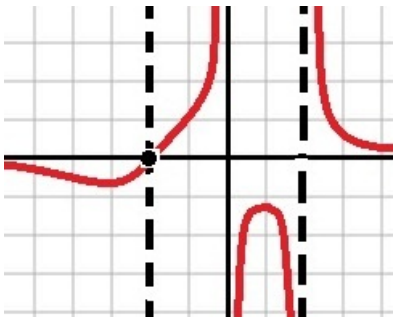
$f(x) = \frac{x(x+2)}{(x-2)}$

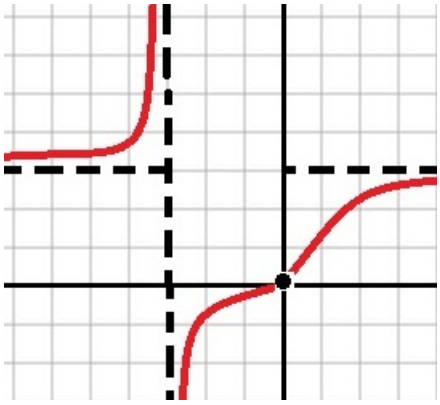
−		R	M
x	N	0	1
$x+2$	N	-2	1
x^2	D	0	2
$x+2$	D	2	1



CdE: $x \neq 0 \quad x \neq 2$ Zeri: $x = -2$

$f(-2) = 0 \quad \lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = \pm\infty \quad f(2) = 0 \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

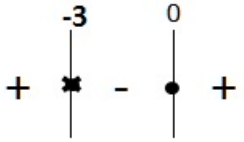




$$f(x) = \frac{3x^2 + 9x}{x^2 + 6x + 9} \qquad f(0) = \frac{0}{9} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3$$

$f(x) = \frac{3x(x+3)}{(x+3)^2}$

−		R	M
x	N	0	1
$x+3$	N	-3	1
$(x+3)^2$	D	-3	2



CdE: $x \neq -3$ Zeri: $x = 0$

$\lim_{x\to -3^{\mp}} f(x) = \pm\infty \quad f(0) = 0 \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3$