GRAFICO DI UNA FUNZIONE

La rappresentazione grafica di una funzione si compone di due passaggi. Il primo consiste nel trovare gli elementi che la caratterizzano: valore in zero, limite all'infinito (visto dettagliatamente nella precedente UdA, verrà qui illustrato un metodo rapido), condizioni di esistenza, limiti dei valori esclusi da tali condizioni (che, come visto nella precedente UdA, è infinito) e gli zeri. Attraverso questi elementi si può disegnare il grafico della funzione, come mostrato in UdA1.

LIMITE ALL'INFINITO

Si era visto come nella precedente UdA il limite all'infinito di una funzione razionale si riduce di fatto a calcolare il limite del rapporto tra i monomi di grado più alto (viene moltiplicato per due funzioni il cui limite è sempre 1). Semplificando tale rapporto tra monomi, la x rimane al più in uno dei due termini, quello di grado maggiore (scompare del tutto se i gradi sono uguali): se rimane al numeratore il limite è infinito, se rimane al denominatore il limite è zero, se scompare il limite è proprio tale numero.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{-x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{-x^2}=-3 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x}=\infty$$

In pratica, senza svolgere il passaggio intermedio, si ha che, data una funzione razionale $f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$.

- Se il grado superiore è quello di N, allora $\lim\limits_{x\to\infty}=\infty$.
- Se il grado superiore è quello di D, allora $\lim\limits_{x\to\infty}=0$.
- Se i due polinomi hanno lo stesso grado, allora $\lim\limits_{x\to\infty}=\frac{n}{d}$, dove n e d sono i coefficienti direttori dei due polinomi.

Ecco un esempio per ognuna delle tre situazioni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3+1}{-x^2+4x}=\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{3x^3+4}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3+1}{2x^3+3x^2}=\frac{-4}{2}=-2$$

VALORE IN ZERO

Dato un polinomio $P(x)$ e un numero a, il valore $P(a)$ si trova sostituendo la variabile x con il valore a. Ecco due esempi:

$$P(x)=2x^2-5x+1 \qquad P(3)=2\cdot3^2-5\cdot3+1=18-15+1=4 \qquad Q(x)=x^3-7x \qquad Q(2)=2^3-7\cdot2=8-14-6$$

Nulla di diverso se si deve trovare $P(0)$, tuttavia i monomi contenenti x daranno sempre come risultato 0 e non influiscono sulla somma: solo il termine noto (quello senza x) è rilevante, e la valutazione $P(0)$ corrisponde proprio a questo (0 se non c'è il termine noto). Quindi, prendendo P e Q come negli esempi precedenti, si ha

$$P(0)=1 \qquad Q(0)=0$$

Nel caso di una funzione razionale, il suo valore in zero è il rapporto tra i due termini noti. Da ricordare che un rapporto vale zero se il numeratore è zero, mentre non è definito se il denominatore è 0 (non viene preso ancora in considerazione il caso del rapporto tra zeri). Ecco quindi alcuni esempi (con la dicitura *n.d.* si intende "non definito"):

$$f(x)=\frac{3x^2-4}{x+2} \quad f(0)=\frac{-4}{2}=-2 \qquad g(x)=\frac{3x^2}{x+2} \quad g(0)=\frac{0}{2}=0 \qquad h(x)=\frac{3x^2-4}{x} \quad h(0)=\frac{-4}{0}\ n.d.$$

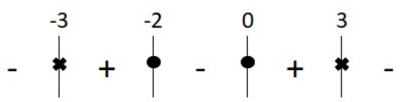
RISULTATI DALLA SCOMPOSIZIONE

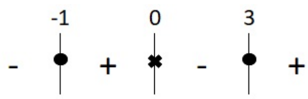
(quando lo zero è una radice)

Dopo aver trovato $f(0)$ e il limite all'infinito, la funzione $f(x)$ viene scomposta e si svolge lo studio del segno. Si considerano prima le situazioni in cui lo zero è una delle radici. A tale scopo è utile svolgere un controllo incrociato, in quanto se 0 è una radice del numeratore si ha $f(0) = 0$, se è radice del denominatore allora $f(0)$ non è definito. Nella precedente UdA si era visto che, per ogni radice a del denominatore, si ha $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ e, nello specifico, il segno di $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ è quello a sinistra di a mentre il segno di $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ è quello a destra di a (diversi se la radice ha molteplicità dispari, uguali se pari). Pertanto, per ogni radice a (si scrivono in ordine crescente) si scrive

- $f(a) = 0$ se a è radice del numeratore.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ se a (con i giusti segni dell'infinito) se a è radice del denominatore.

A questi si aggiunge il limite all'infinito: se esso è infinito, si ha che il segno di $\lim\limits_{x \to -\infty}$ è quello all'estrema sinistra (rispetto allo schema dei segni della funzione), il segno di $\lim\limits_{x \to +\infty}$ è quello all'estrema destra.

<table>
<tr><td>Esempio 1</td><td>Esempio 2</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \frac{2x^2+4x}{-x^2+9}$</td><td>$f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{-3x}$</td></tr>
<tr><td>
$f(0) = \frac{0}{9} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{2}{-1} = -2$
$f(x) = -\frac{2x^2+4x}{x^2-9} = -\frac{2x(x+2)}{(x+3)(x-3)}$
<table>
<tr><td>-</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr>
<tr><td>x</td><td>N</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x+2)$</td><td>N</td><td>-2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x+3)$</td><td>D</td><td>-3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x-3)$</td><td>D</td><td>3</td><td>1</td></tr>
</table>


</td><td>
$f(0) = \frac{3}{0} n.d. \qquad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{3x} = \frac{(x-3)(x+1)}{3x}$
<table>
<tr><td>+</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr>
<tr><td>$(x-3)$</td><td>N</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x+1)$</td><td>N</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$3x$</td><td>D</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>


</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \to -3^\pm} f(x) = \pm\infty \quad f(-2) = 0 \quad f(0) = 0 \quad \lim\limits_{x \to 3^\mp} f(x) = \pm\infty$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$</td><td>$f(-1) = 0 \quad \lim\limits_{x \to 0^\mp} f(x) = \pm\infty \quad f(3) = 0$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$</td></tr>
</table>

Da notare come nel primo esempio, dove lo zero è radice del numeratore, si ha $f(0) = 0$, mentre nel secondo dove lo zero è radice del denominatore, $f(0)$ non è definito (i controlli incrociati, dunque, corrispondono).

RISULTATI DALLA SCOMPOSIZIONE

(quando lo zero non è una radice)

Fino allo studio del segno non c'è nulla di diverso. A questo punto bisogna inserire, nella giusta posizione fra le radici, lo zero (tra due radici oppure ad un'estremità). Esso dunque sarà all'interno di una fascia positiva o negativa. Anche in questo caso vi è la possibilità di un controllo incrociato, perché il segno di tale fascia dovrà corrispondere al segno di $f(0)$.
E tale $f(0)$ va inserito anche fra gli elementi del resoconto finale.

<table>
<tr>
<td>Esempio 3

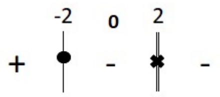
$f(x) = \frac{-2x-4}{x^2-4x+4}$</td>
<td>Esempio 4

$f(x) = \frac{6x^2-6}{-x-3}$</td>
</tr>
<tr>
<td>

$f(0) = \frac{-4}{4} = -1 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$f(x) = -\frac{2x+4}{x^2-4x+4} = -\frac{2(x+2)}{(x-2)^2}$

<table>
<tr><td>-</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr>
<tr><td>$(x+2)$</td><td>N</td><td>-2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x-2)^2$</td><td>D</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

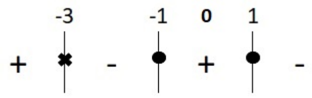


</td>
<td>

$f(0) = \frac{-6}{-3} = 2 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$f(x) = -\frac{6(x^2-1)}{(x+3)} = -\frac{6(x+1)(x-1)}{(x+3)}$

<table>
<tr><td>-</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr>
<tr><td>$(x+1)$</td><td>N</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x-1)$</td><td>N</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$(x+3)$</td><td>D</td><td>-3</td><td>1</td></tr>
</table>



</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(-2) = 0 \qquad f(0) = -1 \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$</td>
<td>$\lim_{x \to -3^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad f(-1) = 0 \qquad f(0) = 2 \qquad f(1) = 0$
$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \pm\infty$</td>
</tr>
</table>

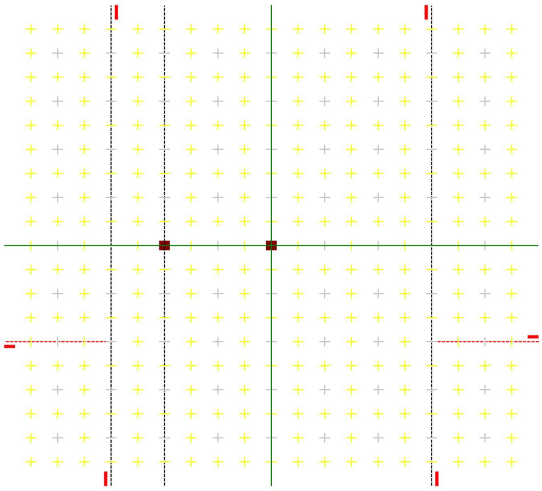
Da notare come nel primo esempio, dove $f(0) = -1$, lo zero è stato inserito in una fascia negativa, mentre nel secondo, dove $f(0) = 2$, lo zero è stato inserito in una fascia positiva (i controlli incrociati, dunque, corrispondono).

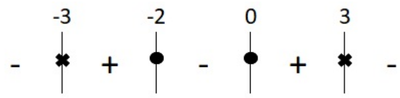
GRAFICO DELLA FUNZIONE

Con gli elementi trovati si può rappresentare il grafico come si era mostrato in UdA1. Ecco il primo dei quattro esempi visti in precedenza, di cui vengono qui trascritti gli elementi trovati:

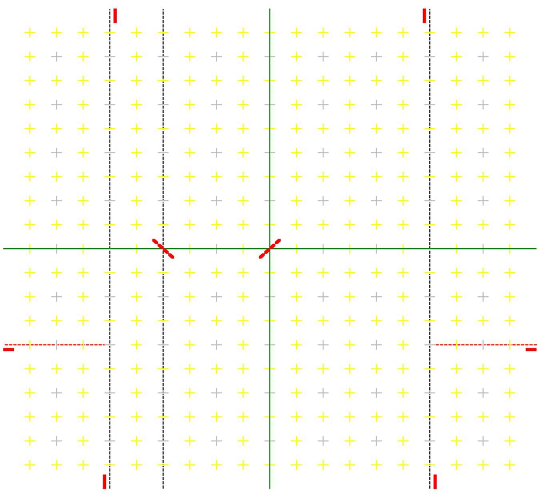
$$\lim_{x \to -3^{\pm}} f(x) = \pm\infty \qquad f(-2) = 0 \qquad f(0) = 0 \qquad \lim_{x \to 3^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -2$$

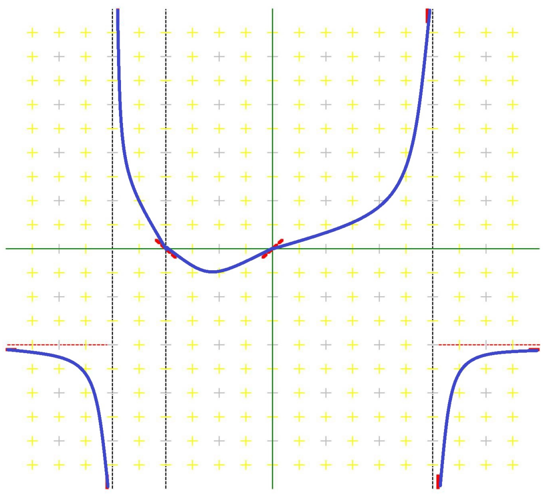
Qui sotto viene visualizzato lo schema preliminare, con punti e lineette che andranno poi collegati: si consiglia di prendere due quadretti come misura unitaria, onde evitare collegamenti in fasce troppo strette.





In UdA1 era stato detto che, per collegare due punti alla stessa quota "senza tratti orizzontali" (e il grafico di una funzione razionale non ne ha), si può indifferentemente collegarli da sopra o da sotto. Questa sarebbe nel caso specifico la situazione per quanto riguarda il collegamento tra $f(-2)$ e $f(0)$: tuttavia in questo caso si ha a disposizione un'informazione in più derivante dallo studio del segno, che viene riportato qui sotto: in particolare esso stabilisce che tra -2 e 0 il segno è negativo, pertanto il collegamento va fatto da sotto.
Per questo motivo è utile tracciare lo schema preliminare in modo diverso, sostituendo i "puntoni" con delle lineette oblique che mostrano da che parte va la funzione: ovviamente se si deve collegare il punto con qualcosa che si trova più in alto o più in basso il verso è scontato. A questo punto i collegamenti possono essere tracciati senza alcuna ambiguità:





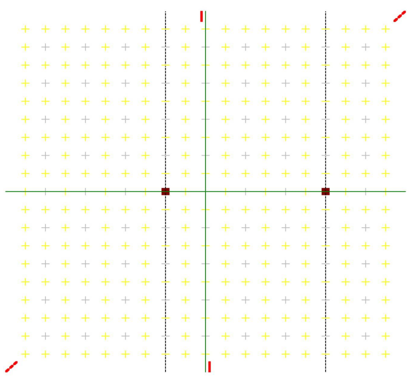
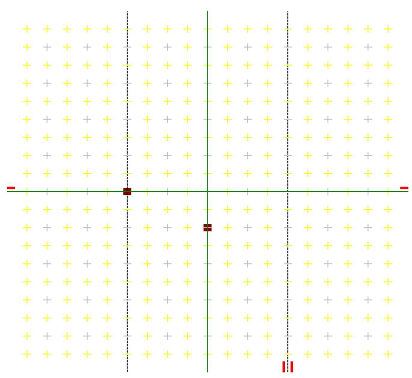
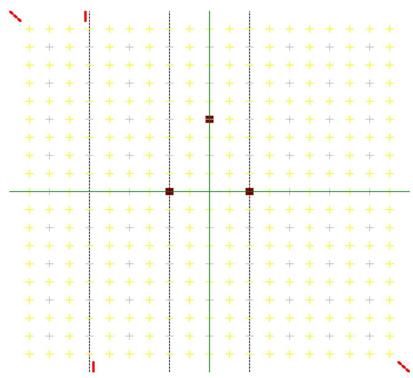
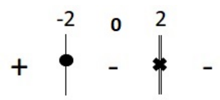
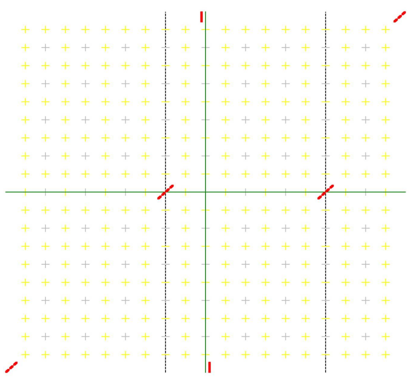
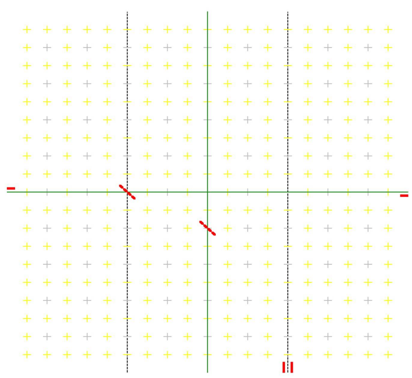
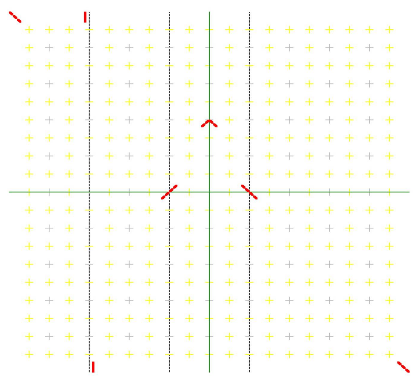
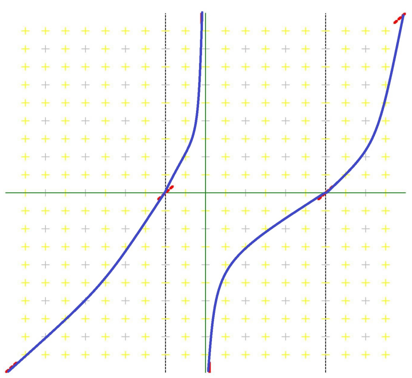
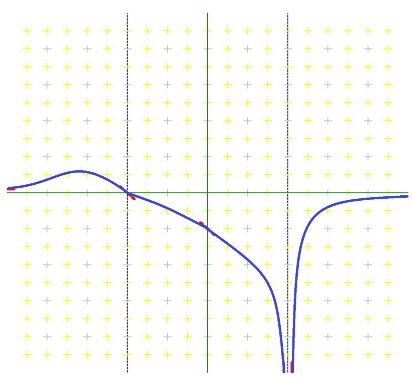
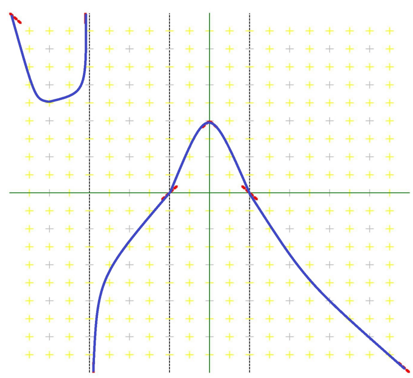
Ecco ora gli altri tre esempi che erano stati trattati precedentemente: per comodità di lettura si riportano i risultati che si erano ottenuti:

$$Es.2 \qquad f(-1)=0 \qquad \lim_{x\to 0^{\mp}} f(x)=\pm\infty \qquad f(3)=0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$$

$$Es.3 \qquad f(-2)=0 \qquad f(0)=-1 \qquad \lim_{x\to 2} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

$$Es.4 \qquad \lim_{x\to -3^{\mp}} f(x)=\pm\infty \qquad f(-1)=0 \qquad f(0)=2 \qquad f(1)=0 \qquad \lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\pm\infty$$

Ed ora, con i consueti tre passaggi, vengono disegnati i rispettivi grafici: nella colonna centrale viene riportato anche lo schema dei segni per stabilire il segno della funzione a sinistra di -2 (che risulta essere positivo).

Esempio 2	Esempio 3	Esempio 4
		
		
		
		

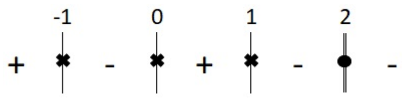
Per concludere, si mostrano due funzioni e lo studio completo dei rispettivi grafici.

<table>
<tr>
<td>$f(x) = \frac{-x^2+4x-4}{x^3-x}$</td>
<td>$f(x) = \frac{-3x^2-12}{-x^2-4x-3}$</td>
</tr>
<tr>
<td>

$f(0) = \frac{-4}{0} n.d. \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$f(x) = -\frac{x^2-4x+4}{x^3-x} = -\frac{x^2-4x+4}{x(x^2-1)} = -\frac{(x-2)^2}{x(x-1)(x+1)}$

-		R	M
$(x-2)^2$	N	2	2
x	D	0	1
$(x+1)$	D	-1	1
$(x-1)$	D	1	1

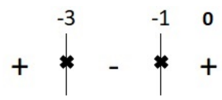


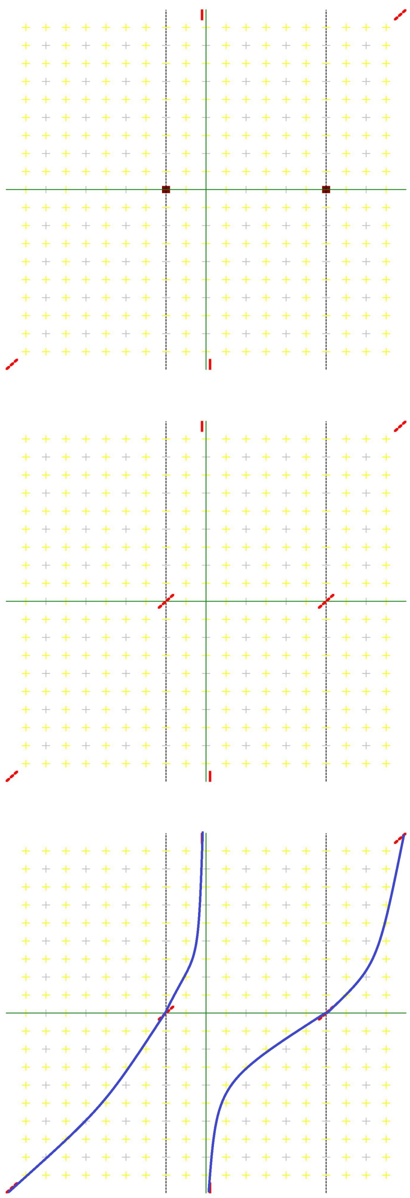
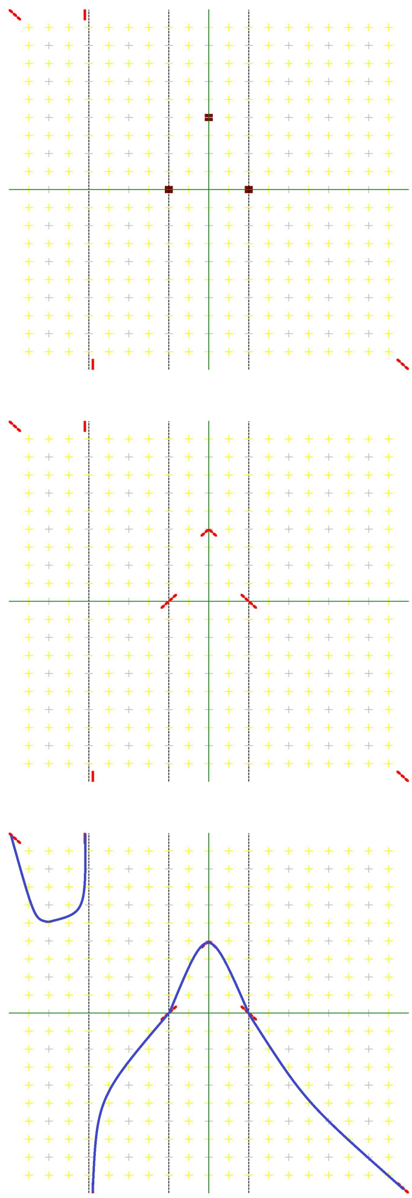
</td>
<td>

$f(0) = \frac{-12}{-3} = 4 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{-3}{-1} = 3$

$f(x) = \frac{3x^2+12}{x^2+4x+3} = \frac{3(x^2+4)}{(x+1)(x+3)}$

$+$		R	M
$(x+1)$	D	-1	1
$(x+3)$	D	-3	1



</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to 1^{\mp}} f(x) = \pm\infty f(2) = 0$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$</td>
<td>$\lim_{x\to -3^{\mp}} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = \pm\infty \quad f(0) = 4$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>