Viene in questo capitolo spiegato brevemente scome si studia il segno nelle funzioni razionali (argomento che era stato trattato in maniera approfondita nel secondo periodo), operazione che determina anche gli zeri e le condizioni di esistenza (CdE).
Viene dato per scontato che i polinomi che compongono le funzioni siano ordinati in maniera decrescente rispetto al grado.

SCOMPOSIZIONE DI POLINOMI

Dato un polinomio ordinato, va prima di tutto estratto l'eventuale segno negativo: in tal caso si scrive tale segno e tra parentesi, si scrive il polinomio con tutti i segni cambiati). A questo punto vanno raccolti un coefficiente (il massimo comune divisore fra i coefficienti, sempre che non sia 1), e/o la x del monomio finale (sempre non finisca con un termine noto), magari nessuna delle due cose Ecco alcuni esempi (nell'ultimo non si può estrarre nulla)

$$2x^3 - 4x^2 + 6 = 2(x^3 - 2x^2 + 3) \qquad -3x^3 + 2x^2 = -(3x^3 - 2x^2) = -x^2(3x - 2)$$

$$-2x^4 - 4x^3 + 2x^2 = -(2x^4 + 4x^3 - 2x^2) = -2x^2(x^2 + 2x - 1) \qquad -3x^3 + 2x$$

A questo punto, si prova a scomporre ciò che rimane dopo il raccoglimento, sempre che non sia un binomio di primo grado (in questo caso non si fa più nulla): si considerano solo polinomi di secondo grado monici (ossia senza coefficiente di x^2).
Se è un binomio, dipende dal segno del termine noto: se è positivo (come nei primi due dei seguenti esempi), non si può fare nulla; se è negativo, se ne trova la radice quadrata r e si scompone come $(x - r)(x + r)$ (come negli altri due esempi).

$$x^2 + 9 \qquad x^2 + 4 \qquad x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) \qquad x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Nel caso di trinomi, quindi nella forma $x^2 + sx + p$ con s e p di segno qualunque, bisogna trovare due numeri T_1 e T_2 aventi s e p rispettivamente come somma e come prodotto, e scomporre come $(x + T_1)(x + T_2)$. Ecco degli esempi:

$$x^2+3x+2 = (x+2)(x+1) \qquad x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \qquad x^2+x-2 = (x-2)(x+1) \qquad x^2-3x-10 = (x+2)(x-5)$$

Se i due numeri sono uguali, anziché duplicare il binomio, si scrive una sola volta elevato al quadrato:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \qquad x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2)$$

Ecco ora due esempi di scomposizioni complete, a partire dal raccoglimento.

$$-3x^3+3x = -(3x^3-3x) = -3x(x^2-1) = -3x(x+1)(x-1) \qquad x^4+2x^3-8x^2 = x^2(x^2+2x-8) = x^2(x+4)(x-2)$$

SCOMPOSIZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

Numeratore e denominatore vengono scomposti indipendentemente l'uno dall'altro: solo in fase di estrazione del segno vi è un'interazione: il segno negativo non si mette davanti al numeratore e/o al denominatore, ma davanti alla frazione (se riguarda solo uno dei due termini) o non si mette del tutto (se riguarda entrambi i termini). Ecco degli esempi:

$$\frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 1} = -\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} = -\frac{x(x - 2)}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$\frac{x^2 + 1}{-2x - 6} = -\frac{x^2 + 1}{2x + 6} = -\frac{x^2 + 1}{2(x + 3)}$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 4}{-x^4 - x^3} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^4 + x^3} = \frac{(x - 2)^2}{x^3(x + 1)}$$

SCHEMA DELLE RADICI

Da quanto visto precedentemente, segue che la scomposizione di un polinomio dà come risultato un prodotto di (ognuno dei seguenti può esserci o no):

- Un segno negativo
- Monomio, a sua volta prodotto di
  - Coefficiente
  - Monomio monico (nella forma x^a o semplicemente x quando $a = 1$)
- Binomi monici di primo grado, eventualmente elevati al quadrato (nella forma $(x \pm a)$ 0 $(x \pm a)^2$)
- Binomi monici di secondo grado con termine noto positivo (nella forma $x^2 + a$)

Il monomio x^n ha come radice 0 e molteplicità n, un binomio nella forma $(x \pm a)^n$ ha radice $\mp a$ con molteplicità n (1 se non viene elevato a potenza). I coefficienti si ignorano, come anche i binomi di secondo grado; non si ignora invece il segno davanti, Ecco lo schema delle radici delle funzioni razionali trattate come esempio nel paragrafo precedente: in alto a sinistra il segno (quello davanti alla frazione), la seconda colonna indica se il fattore proviene dal numeratore o dal denominatore, la terza e la quarta contengono rispettivamente le radici e le molteplicità.

$$-\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-1)}$$

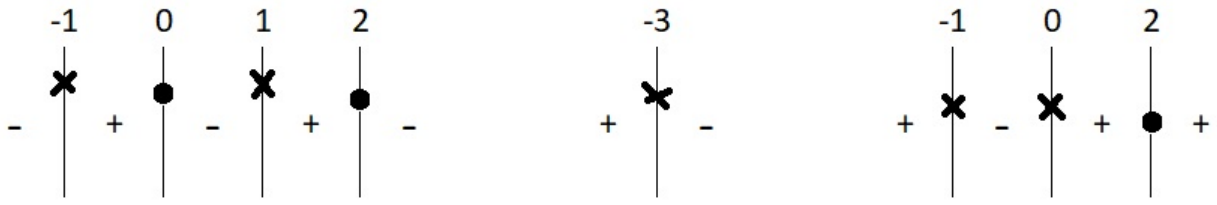
-		R	M
x	N	0	1
$(x-2)$	N	2	1
$(x+1)$	D	-1	1
$(x-1)$	D	1	1

$$-\frac{x^2+1}{2(x+3)}$$

-		R	M
$(x+3)$	D	-3	1

$$\frac{(x-2)^2}{x^3(x+1)}$$

+		R	M
$(x-2)^2$	N	2	2
$x^3)$	D	0	3
$(x+1)$	D	-1	1

STUDIO DEL SEGNO

Il segno di una funzione segue dallo schema delle radici: si scrivono in ordine crescente e si rappresentano con delle barre verticali. Le barre relative alle radici con molteplicità pari, vengono raddoppiate: inoltre sulle radici del numeratore viene rappresentato un puntone (che sta a significare che tale radice è uno zero), su quelle del denominatore una crocetta (tali valori non fanno parte del campo di esistenza). Si scrivono poi i segni fra di esse ed esternamente ad esse, a cominciare da destra, il cui segno è quello scritto nell'angolo della tabella delle radici. Si procede poi verso sinistra, cambiando il segno ogni volta che si attraversa una barra singola e conservandolo lungo le barre doppie. Va dunque notato che se tutte le molteplicità sono dispari (e quindi tutte barre singole) i segni sono sempre alternati. Ecco i tre esempi affrontati nel paragrafo precedente: