LIMITI NELLE FUNZIONI RAZIONALI

Data una funzione f e due valori ae L (ognuno dei quali puo essere infinito), la notazione

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

significa che per valori molto vicini ad a, la funzione assume valori molto vicini a L ricordando, come visto in UdA1, che "vicino a infinito" significa "molto grande". Verra mostrato come calcolare il limite di una funzione razionale, sia per valori finiti che per valori infiniti: questi ultimi, dal punto di vista grafico, indicano cosa succede all'estrema sinistra (per $\lim\limits_{x\to-\infty}$) e all'estrema destra (per $\lim\limits_{x\to+\infty}$).

LIMITI PER UN VALORE FINITO

Invece con $f(a) = L$ si intende che esattamente in a la funzione vale esattamente L. Nelle funzioni razionali, se $f(a)$ esiste, il limite è proprio $f(a)$, ossia il valore ottenuto sostituendo la x della funzione con il valore a. Ecco un esempio:

$$\lim_{x\to-2} \frac{x+4}{x-2} = \frac{-2+4}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to3} \frac{-x+3}{x^2-1} = \frac{-3+3}{3^2-1} = \frac{0}{8} = 0$$

Fino a questo punto, il limite non ha una grande utilità, dal momento che basterebbe usare $f(a)$.
Ma quando il denominatore vale 0, la funzione non è definita, dato che non si può dividere per zero. Tuttavia, il limite non dice cosa succede esattamente per quel valore, ma per valori molto vicini ad esso: e questo significa dividere per un valore molto vicino a zero, che, se il dividendo non è a sua volta molto piccolo (situazione $0/0$) dà come risultato un numero molto grande. Ad esempio:

$$1 : 0,000001 = 1000000 \qquad 3 : 0,0000001 = 30000000$$

Dato che "molto grande" equivale a dire "vicino a infinito", data una funzione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ e un valore a, ecco quanto vale $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$

$$\frac{P(a)}{Q(a)} \text{ se } Q(a) \neq 0 \qquad \infty \text{ se } P(a) \neq 0 \text{ e } Q(a) = 0 \qquad \textit{indeterminato} \text{ se } P(a) = 0 \text{ e } Q(a) = 0$$

Tralasciando l'ultimo caso, che verrà trattato in UdA4, si può dire che, a livello di limiti, l'impossibile operazione di dividere per 0 diventa possibile passando ai limiti, e dà come risultato ∞. Si era visto in UdA1 che il limite non può essere semplicemente infinito, ma deve avere un segno positivo ($+\infty$) o negativo ($-\infty$): per stabilire questo bisogna passare dallo studio del segno, per il momento ci si limita a scrivere ∞ lasciando in sospeso il suo segno.
Ecco due esempi in cui limite è infinito:

$$\lim_{x\to-3} \frac{x+4}{x^2+2x-3} = \frac{-3+4}{(-3)^2+2\cdot(-2)-3} = \frac{1}{9-6-3} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2} \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{-2+2} = \frac{-2}{0} = \infty$$

LIMITI PER UN VALORE INFINITO

Si era visto in UdA1 che il limite di una funzione viene definito anche per valori infiniti, che graficamente indica cosa succede all'estrema sinistra (per $\lim\limits_{x\to-\infty}$) e all'estrema destra (per $\lim\limits_{x\to+\infty}$). Dato che "vicino ad infinito" significa "molto grande" e che se un numero molto grande viene moltiplicato o diviso per un numero "non grande" (purché non zero) rimane molto grande, si deduce che, dati due numeri a e b diversi da zero, si ha:

$$\frac{a\cdot\infty}{b}=\frac{\infty}{b}=\infty \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{b}=\infty$$

Più in generale, un valore molto grande moltiplicato per se stesso, ovvero elevato a potenza, resta molto grande (anzi, lo diventa ancora di più), pertanto

$$\frac{a\cdot\infty^n}{b}=\frac{\infty}{b}=\infty \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{b}=\infty$$

Invece, dividendo per un valore molto grande, si ottiene un valore molto piccolo, cioè vicino a zero, quindi $\frac{a}{\infty}=0$. E, generalizzando, come fatto precedentemente

$$\frac{a}{b\cdot\infty^n}=\frac{a}{b\cdot\infty}=\frac{a}{\infty}=0 \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{a}{bx^n}=0$$

Si introduce ora una notazione rapida: quando è chiaro per quale valore si calcola il limite (in questo caso per $x\to\infty$) si può, anziche scrivere $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$, usare la notazione $f(x)\longrightarrow L$. Ecco i limiti scritti precedentemente come vengono scritti usando questa notazione

$$\frac{ax^n}{b}\longrightarrow\infty \qquad\qquad \frac{a}{bx^n}\longrightarrow 0$$

RAPPORTO DI MONOMI

Un rapporto di monomi può sempre essere semplificato, in modo tale che la x non compaia in entrambi i termini: comparirà solo al numeratore (in tal caso il limite è infinito), solo al denominatore (il limite è zero) o in nessuno dei due (ne esce un numero, eventualmente frazionario). Ecco un esempio per ognuno dei tre possibili casi (viene usata la notazione rapida precedentemente spiegata): da notare come solo se la x scompare (ovvero se hanno lo stesso esponente) i coeffienti hanno importanza.

$$\frac{2x^3}{3x}=\frac{2x^2}{3}\longrightarrow\frac{2\cdot\infty^2}{3}=\frac{\infty}{3}=\infty \qquad \frac{4x^4}{5x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{5}\longrightarrow\frac{4}{5} \qquad \frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}\longrightarrow\frac{2}{\infty}=0$$

RAPPORTO DI UN POLINOMIO CON IL SUO MONOMIO PRINCIPALE

Dato un polinomio $P(x)$, si consideri il suo monomio principale $M(x)$, cioe quello di grado più alto (il primo, se il polinomio è ordinato in maniera decrescente) di grado più alto e il limite all'infinito della funzione $M(x)$. Essendo $P(x)$ una somma di monomi, tale rapporto può essere trasformato in una somma in cui ognuno dei monomi viene diviso per il monomio $M(x)$: ognuno degli addendi può essere semplificato, e il primo di essi si riduce a 1, tutti gli altri avranno come limite 0, pertanto il limite sara 1. Ecco un esempio (si potrebbero semplificare altri coefficienti, oltre al primo, ma non è necessario):

$$\frac{2x^3-3x^2-6x+1}{2x^3}=\frac{2x^3}{2x^3}-\frac{3x^2}{2x^3}-\frac{6x}{2x^3}+\frac{1}{2x^3}=1-\frac{3}{2x}-\frac{6}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}\longrightarrow 1-0-0+0=1$$

FUNZIONI RAZIONALI

Data una funzione razionale, i cui termini sono i polinomi $P_1(x)$ e $P_2(x)$, si considerino i rispettivi monomi principali $M_1(x)$ e $M_2(x)$: la funzione si può scrivere come un prodotto di tre rapporti, uno dei quali puo essere invertito trasformando il prodotto in una divisione (si ricordi che moltiplicare per $\frac{a}{b}$ equivale a dividere per $\frac{b}{a}$). Ecco in che modo:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{M_1(x)}{M_2(x)} \cdot \frac{P_1(x)}{M_1(x)} \cdot \frac{M_2(x)}{P_2(x)} = \frac{M_1(x)}{M_2(x)} \cdot \frac{P_1(x)}{M_1(x)} : \frac{P_2(x)}{M_2(x)}$$

Si hanno tre funzioni razionali di cui la prima è un rapporto di monomi (e si è visto come calcolare il limite), le altre due sono polinomi rapportati con il suo monomio principale (e anche di questi si è visto come calcolare il limite, che vale sempre 1). Ecco alcuni esempi: le tre funzioni in cui la funzione viene scomposta sono evidenziate con colori diversi, e nelle righe successive si calcola il limite di ognuna di esse, per poi riportarlo nella principale. Va notato che esso viene determinato dal rapporto fra i monomi (e dunque dal confronto dei loro gradi), visto che nelle altre due il limite risulta sempre 1.

$$\frac{-4x^2+6x}{6x^2-3} = \frac{-4x^2}{6x^2} \cdot \frac{-4x^2+6x}{-4x^2} \cdot \frac{6x^2}{6x^2-3} = \frac{-4x^2}{6x^2} \cdot \frac{-4x^2+6x}{-4x^2} : \frac{6x^2-3}{6x^2} \longrightarrow -\frac{2}{3} \cdot 1 : 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{-4x^2}{6x^2} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{-4x^2+6x}{-4x^2} = \frac{-4x^2}{-4x^2} + \frac{6x}{-4x^2} = 1 + \frac{6}{-4x} \longrightarrow 1 + \frac{6}{-4 \cdot \infty} = 1 + \frac{6}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$\frac{6x^2-3}{6x^2} = \frac{6x^2}{6x^2} - \frac{3}{6x^2} = 1 - \frac{3}{6x^2} \longrightarrow 1 - \frac{3}{6 \cdot \infty^2} = 1 - \frac{3}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$\frac{3x^3-2x^2+x}{-5x-2} = \frac{3x^3}{-5x} \cdot \frac{3x^3-2x^2+x}{3x^3} \cdot \frac{-5x}{-5x-2} = \frac{3x^3}{5x} \cdot \frac{3x^3-2x^2+x}{3x^3} : \frac{5x-2}{5x} \longrightarrow \infty \cdot 1 : 1 = \infty$$

$$\frac{3x^3}{-5x} = \frac{3x^2}{-5} \longrightarrow \frac{3 \cdot \infty^2}{-5} = \frac{\infty}{-5} = \infty$$

$$\frac{3x^3-2x^2+x}{3x^3} = \frac{3x^3}{3x^3} - \frac{2x^2}{3x^3} + \frac{x}{3x^3} = 1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2} \longrightarrow 1 - \frac{2}{3 \cdot \infty} + \frac{1}{3 \cdot \infty^2} = 1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$\frac{-5x-2}{-5x} = \frac{-5x}{-5x} - \frac{2}{-5x} = 1 - \frac{2}{-5x} \longrightarrow 1 - \frac{2}{-5 \cdot \infty} = 1 - 0 = 1$$

$$\frac{-3x+1}{-x^2+2} = \frac{-3x}{-x^2} \cdot \frac{-3x+1}{-3x} \cdot \frac{-x^2}{-x^2+2} = \frac{-3x}{-x^2} \cdot \frac{-3x+1}{-3x} : \frac{-x^2+2}{-x^2} \longrightarrow 0 \cdot 1 : 1 = 0$$

$$\frac{-3x}{-x^2} = \frac{-3}{-x} \longrightarrow \frac{3}{\infty} = 0$$

$$\frac{-3x+1}{-3x} = \frac{-3x}{-3x} + \frac{1}{-3x} = 1 + \frac{3}{\infty} \longrightarrow 1 + \frac{3}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$\frac{-x^2+2}{-x^2} = \frac{-x^2}{-x^2} + \frac{2}{-x^2} \longrightarrow 1 + \frac{2}{-\infty^2} = 1 - 0 = 1$$