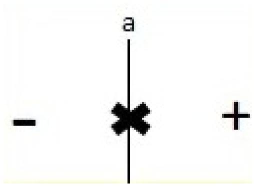
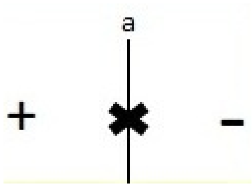
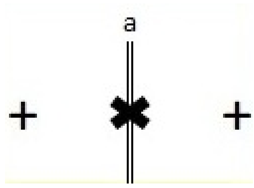
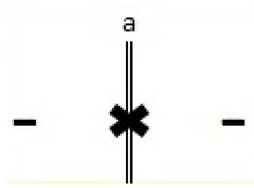
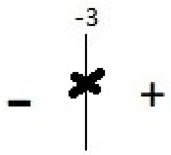
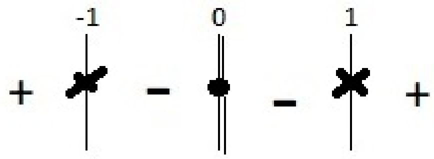
LIMITE PER VALORI ESCLUSI DAL DOMINIO

Data una funzione, è importante trovare il limite ai margini del dominio: ovvero all'infinito (e si è visto come fare) e per i valori esclusi dalle condizioni di esistenza. Questi si trovano attraverso lo studio del segno e corrisppondono alle radici del denominatore. Si era già visto in precedenza che, il limite di un rapporto il cui denominatore risulta zero (sempre che non risulti zero anche il numeratore, situazione che in questa UdA non verrà presa in considerazione), il limite è infinito, senza tuttavia poter dire se fose positivo o negativo: questa informazione arriva dallo studio del segno, che stabilisce il segno del limite (infinito) sinistro e destro come il segno della funzione rispettivamente a sinistra e a destra di tale valore. Ecco le situazioni possibili (notare come se la barra è doppia i segni sono uguali, se è singola sono diversi), e i limiti che la funzione assume:

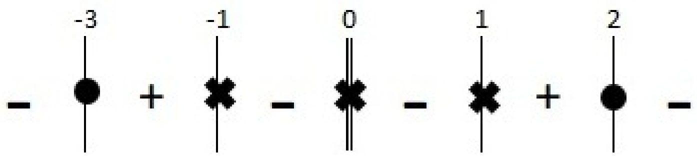
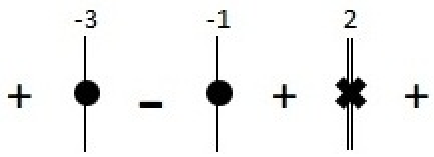
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$</td>
<td>$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$</td>
<td>$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$</td>
<td>$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$</td>
<td>$\lim_{x\to a^\mp} f(x) = \pm\infty$</td>
<td>$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$</td>
<td>$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$</td>
</tr>
</table>

Nell'ultima riga vengono mostrate le notazioni rapide per evitare di duplicare la scrittura: se era già noto che, quando i limiti sono uguali, si può scrivere il limite unico, senza specificare destro e sinistro, quando sono diversi le notazioni usate contengono il doppio segno sia sulla a sia sull'infinito: leggendo i due segni sopra si denota un limite, leggendo i due sotto l'altro limite.

Ecco ora due esempi completi di funzioni di cui viene trovato il dominio, si tenta di valutare la funzione per tali valori ottenendo una (impossibile) divisione per zero, e se ne trova il limite:

<table>
<tr><td>$f(x) = \frac{x^2+1}{2x+6} = \frac{x^2+1}{2(x+3)}$</td><td>$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>+</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>$(x+3)$</td><td>D</td><td>-3</td><td>1</td></tr></table></td><td><table><tr><td>+</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>x^2</td><td>N</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>$(x+1)$</td><td>D</td><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>$(x-1)$</td><td>D</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$f(-3) = \frac{(-3)^2+1}{2\cdot(-3)+6} = \frac{9+1}{-6+6} = \frac{10}{0}$</td><td>$f(-1) = \frac{(-1)^2}{(-1)^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$
$f(1) = \frac{1^2}{1^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to -3^\pm} f(x) = \pm\infty$</td><td>$\lim_{x\to -1^\mp} f(x) = \pm\infty$
$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$</td></tr>
</table>

Ora altri due esempi: in questo caso viene saltato il tentativo di valutazione, e dopo lo studio del segno vengono scritti direttamente i limiti:

<table>
<tr><td>$f(x) = \frac{x^2-x-6}{-x^4+x^2} = -\frac{x^2-x-6}{x^4-x^2} = -\frac{x^2-x-6}{x^2(x^2-1)} = -\frac{(x-3)(x+2)}{x^2(x+1)(x-1)}$</td><td>$f(x) = \frac{-x^2-x}{-x^2+4x-4} = \frac{x^2+x}{x^2-4x+4} = \frac{x(x+1)}{(x-2)^2}$</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>-</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>$(x-3)$</td><td>N</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>$(x+2)$</td><td>N</td><td>-2</td><td>1</td></tr><tr><td>x^2</td><td>D</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>$(x+1)$</td><td>D</td><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>$(x-1)$</td><td>D</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td><table><tr><td>+</td><td></td><td>R</td><td>M</td></tr><tr><td>x</td><td>N</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>$(x+1)$</td><td>N</td><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>$(x-2)^2$</td><td>D</td><td>2</td><td>2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to -1^\mp} f(x) = \pm\infty$
$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$</td><td>$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$</td></tr>
</table>