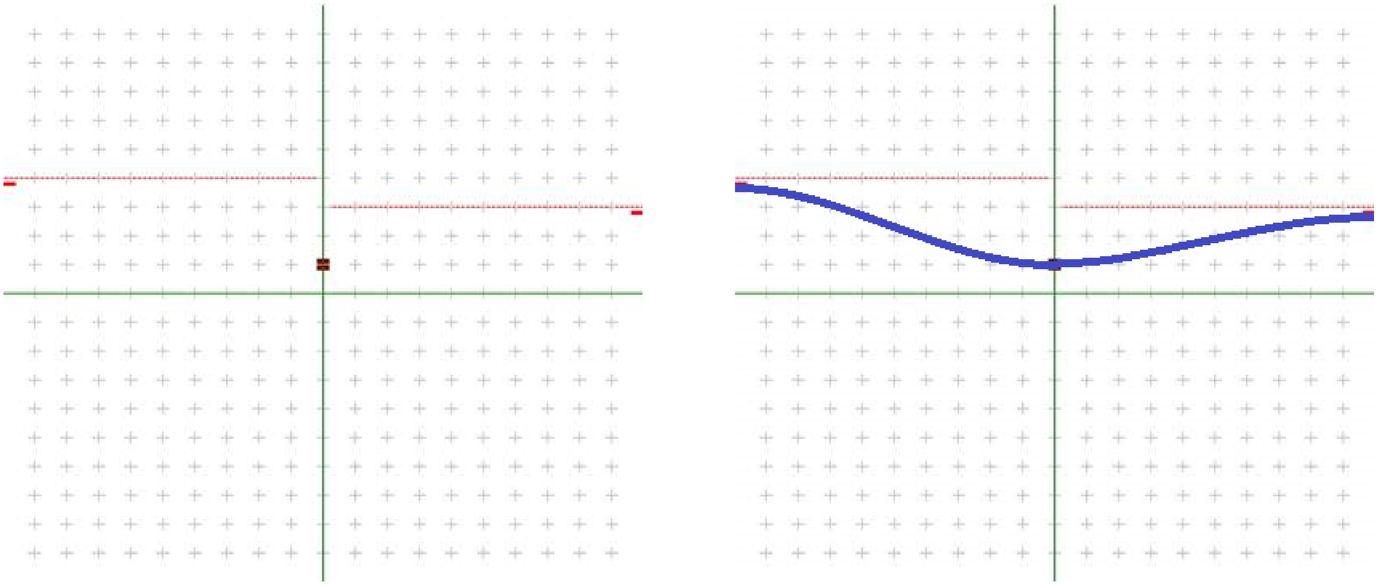
LIMITI NELLE FUNZIONI REALI

Si è visto come per un intervallo, specificare agli estremi il limite, non dà informazioni sufficienti a disegnare la funzione, ma mette soltanto dei vincoli.
Ecco ora come si può estendere la situazione all'intero insieme dei numeri reali ponendo dei vincoli in corrispondenza di alcuni valori. A questi vanno sempre aggiunti gli estremi, ossia i limiti all'infinito (positivo e negativo)
Si parte dal caso più semplice, in cui c'è un solo valore su cui si specifica cosa succede, lo zero.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4 \qquad f(0) = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

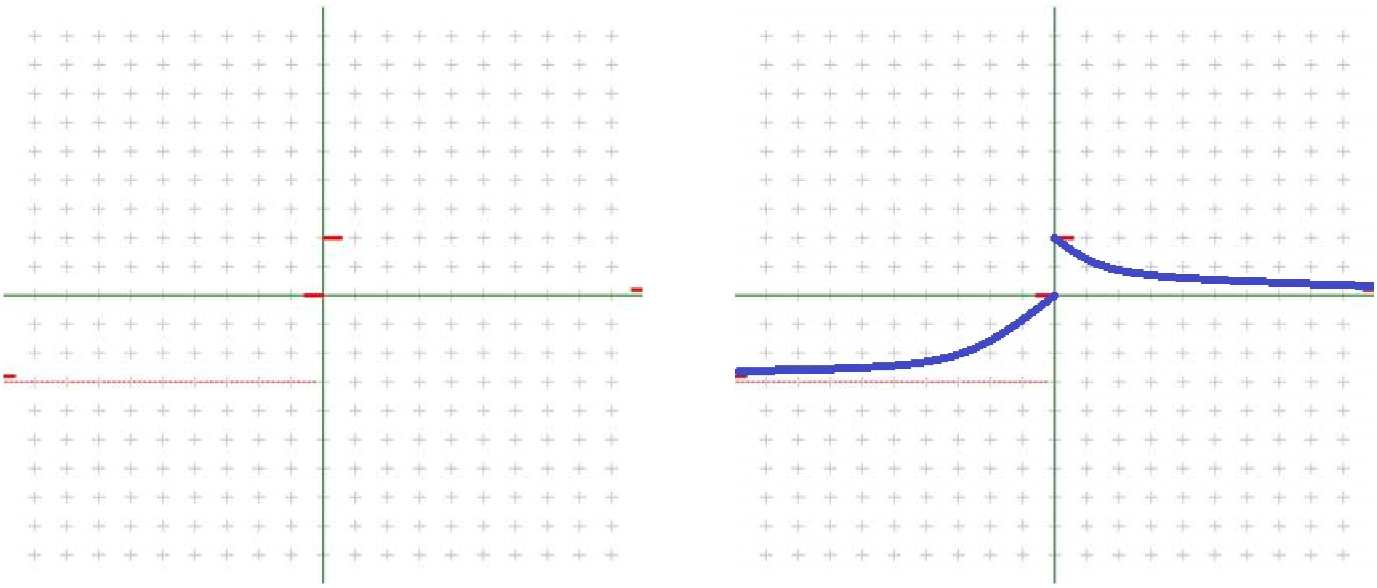
Il grafico di una funzione di questo tipo è l'unione di due grafici di funzioni definite in un intervallo: una definita nell'intervallo $]-\infty, 0]$ dove $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$ e $f(0) = 1$; l'altra definita su $[0, +\infty]$ dove $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$. Ecco quindi il grafico, disegnato come consuetudine in due passaggi: prima si segnano tramite linnette e un puntone nei punti specifici, e poi vengono svolti i collegamenti.



Da notare come già il primo passaggio rende l'idea di cosa succede in ognuna alle estremità di ognuna delle due fasce verticali in cui il piano viene diviso dall'asse verticale (ossia dalla retta $x = 0$, proprio lo 0 che rappresenta il valore su cui era stato specificato l'andamento della funzione).
Ma per $x = 0$, invece che dichiarare il valore, si possono specificare il limite sinistro (indicato come $\lim_{x \to 0^-}$) e il limite destro ($\lim_{x \to 0^+}$), come in questo esempio:

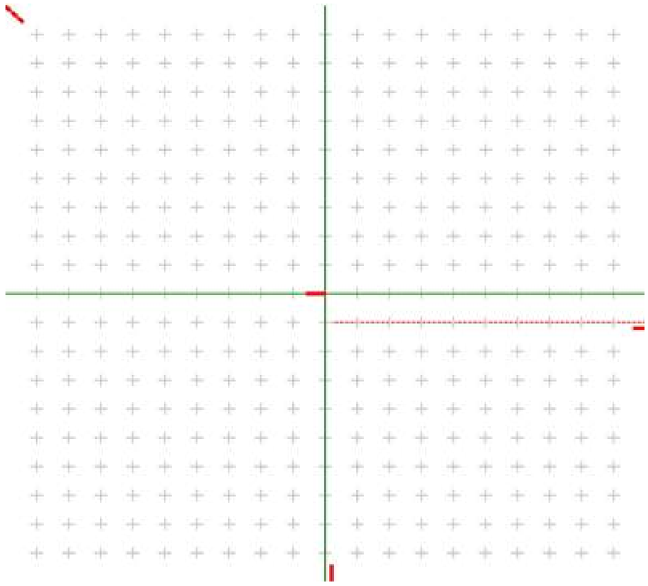
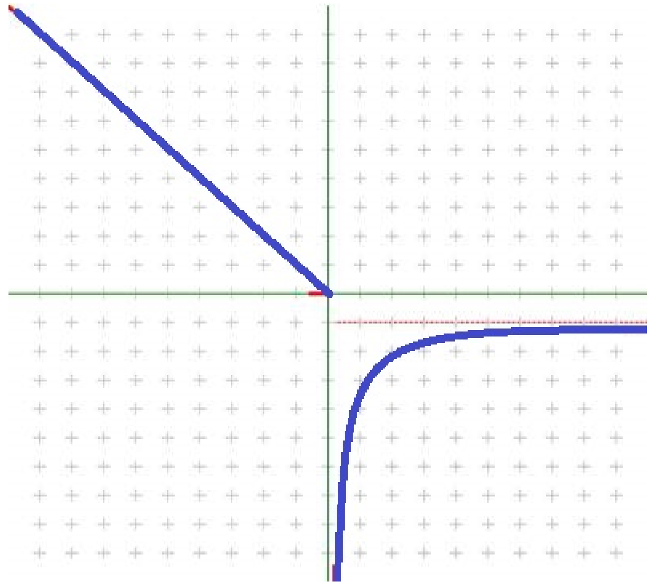
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Anche in questo il grafico è l'unione due grafici di funzioni definite negli stessi intervalli di prima, con l'unica differenza che sono intervalli aperti (manca l'estremo 0) e in tale estremo mancante si dichira il limite, che è diverso nei due intervalli. A sinistra c'è una funzione con dominio $]-\infty, 0[$ in cui $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, a destra una con dominio $]0, +\infty]$ dove $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Ecco il grafico: notare come in corrispondenza dell'asse verticale ci sono due beccucci, uno rivolto verso sinistra ad altezza 0 (limite sinistro), uno verso destra ad altezza 2 (limite destro).



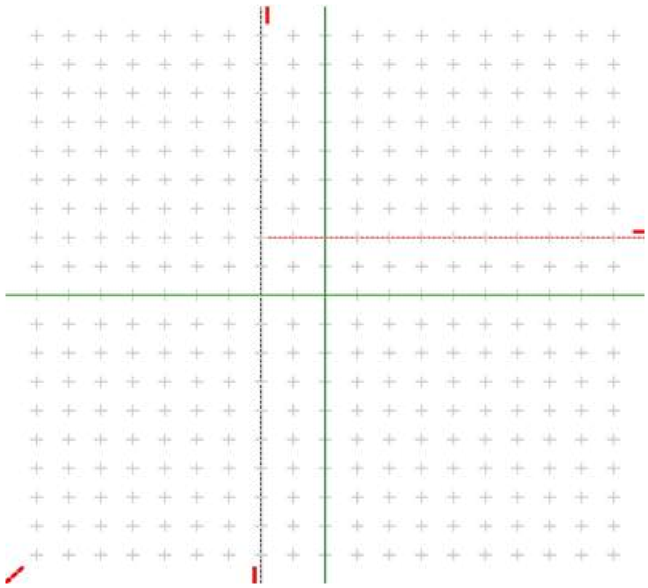
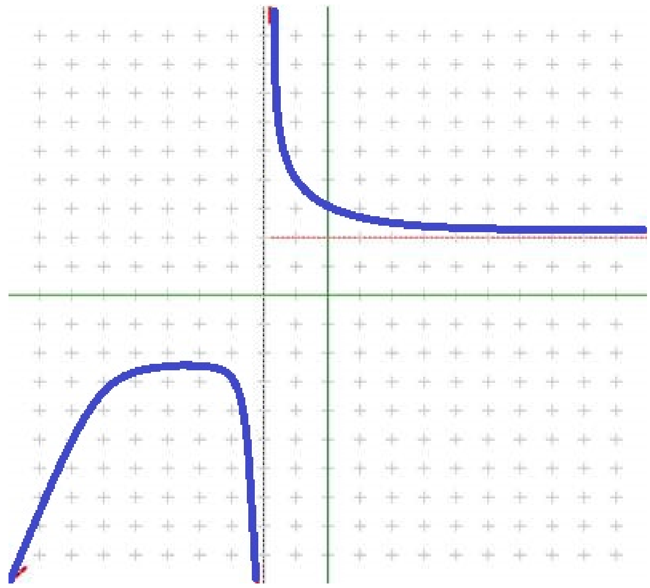
Nulla vieta che ci siano dei limiti infiniti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

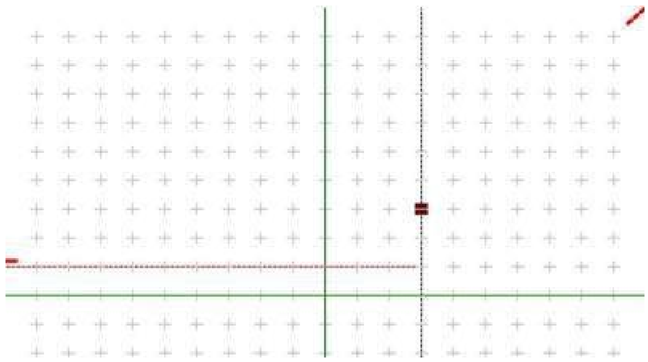
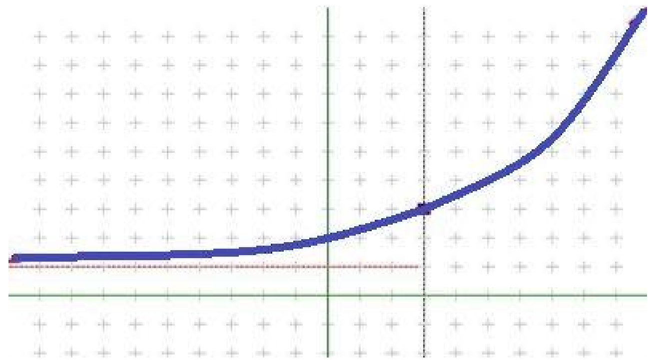



Finora si sono visti esempi in cui il vincolo è su $x = 0$, ma può essere anche in corrispondenza di un altro valore: in tal caso bisogna prima disegnare la retta verticale corrispondente a tale valore di x (quando $x = 0$ tale retta già c'è, è l'asse verticale). Ecco due esempi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

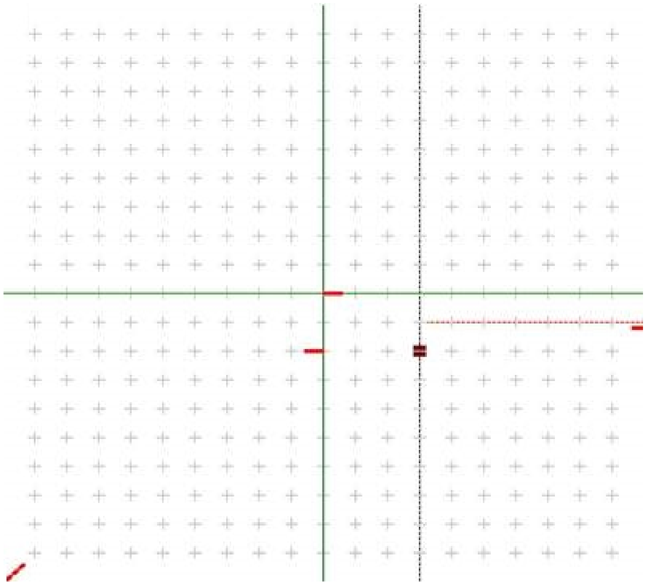
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad f(3) = 3 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

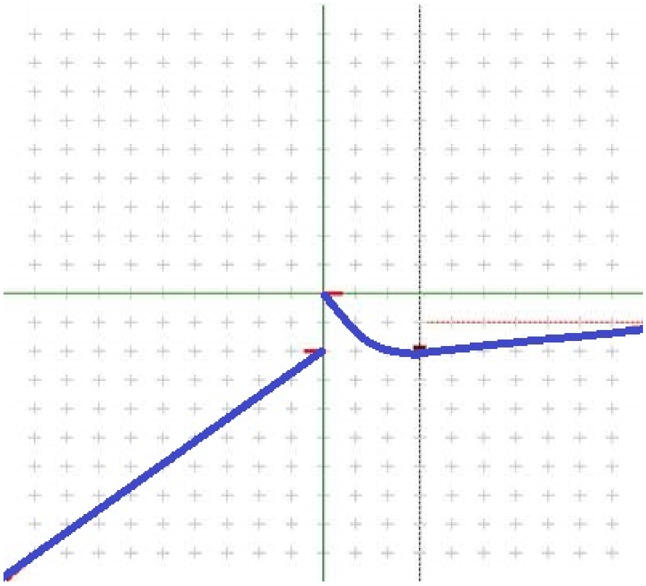



I valori di x su cui viene vincolata la funzione possono essere più di uno, in ognuno dei quali può essere definito il valore della funzione oppure una coppia di limiti (destro e sinistro): ecco un esempio con due valori, in corrispondenza dei quali si definisce una coppia di limiti. Si introduce una nuova convenzione, quella di dichiarare per ultimi i limiti all'infinito (nonostante, guardando il grafico da sinistra a destra $\lim\limits_{x\to-\infty}$) sarebbe il primo.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad f(3) = 2 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$$

Va notato come questa volta la funzione viene disegnata in tre intervalli, di cui quello contrale è limitato (tra 0 e 3)

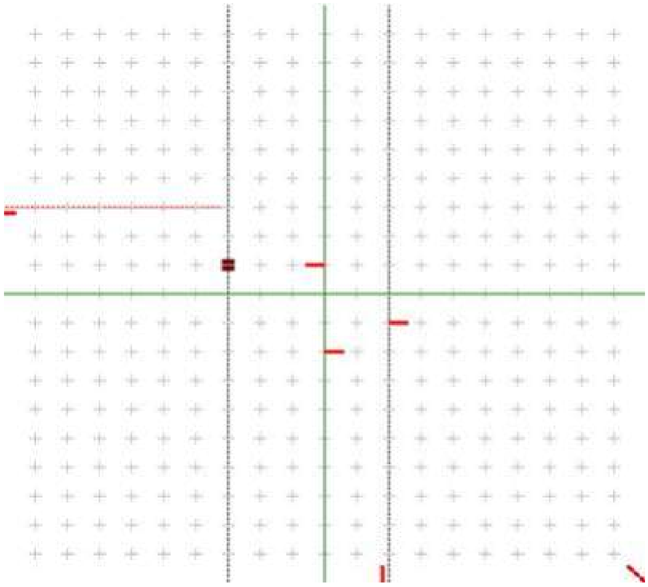


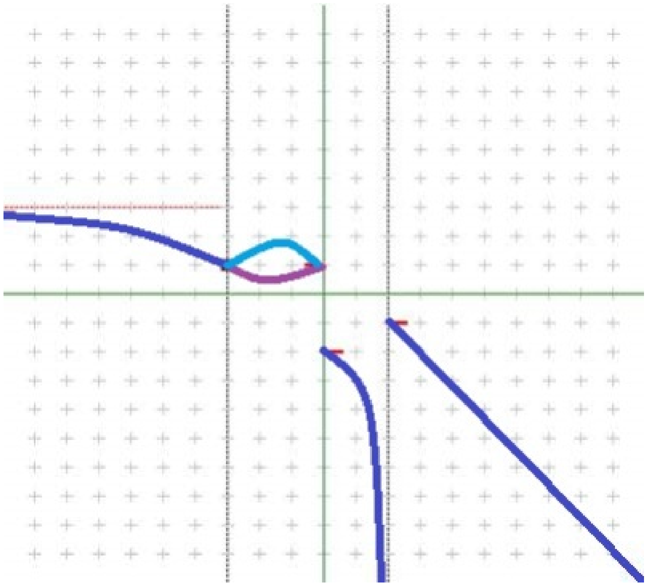


Ora un esempio con tre valori: il grafico si rappresenta in quattro intervalli, i due centrali limitati, i due estremi (come sempre) illimitati.

$$f(-3) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -1 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

In questo caso il collegamento nell'intervallo tra -3 e 0 potrebbe essere orizzontale. Ma, come già visto in passato, se si aggiunge la richiesta "senza tratti orizzontali" tale collegamento deve passare o sopra o sotto (nel grafico viene rappresentata con due colori diversi).





In maniera analoga si può rappresentare una funzione reale con un numero qualsiasi di vincoli, su ognuno dei quali viene definito il valore della funzione oppure una coppia di limiti.

Notazioni rapide per limiti uguali

Quando i limiti all'infinito sono uguali (finiti o infiniti che siano) si può usare la notazione (in cui L è un numero reale oppure $+\infty$ oppure $-\infty$)

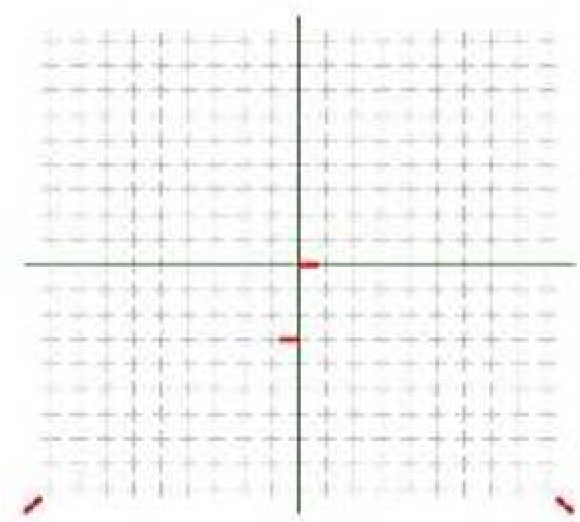
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

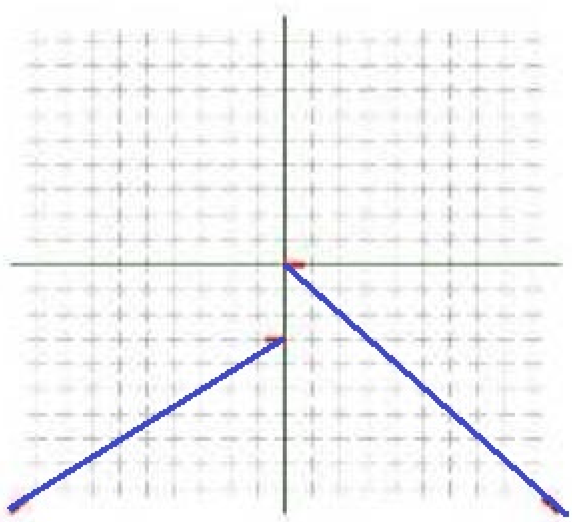
Si ricordi che, a differenza dei numeri reali, in cui l'assenza di segno equivale ad un segno positivo, l'infinito senza segno è di segno indeterminato: ovvero la notazione sopra è un modo rapido per scrivere (evitando così la duplicazione)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Ecco due esempi: in questo il comune limite è infinito ($-\infty$ per l'esattezza)

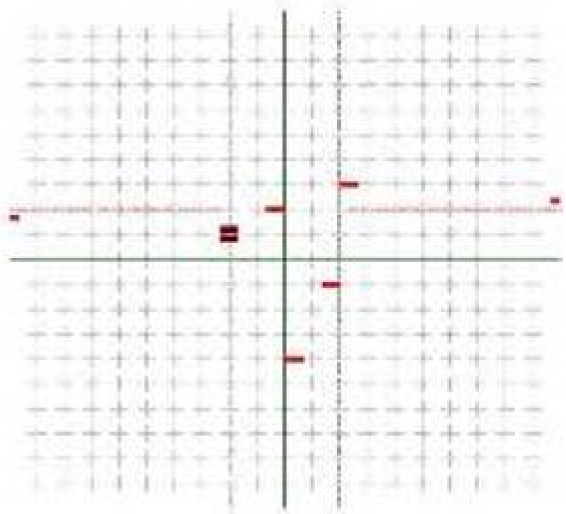
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

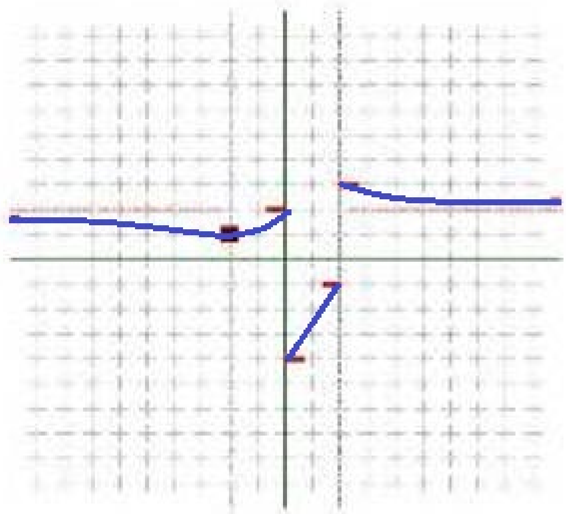




In quest'altro il comune limite è finito (3 per l'esattezza): da notare che nulla vieta (come in questo caso) che il grafico si avvicini all'asintoto orizzontale da aree opposte: a sinistra dove va a collegarsi ad un punto a quota 2, viene dal basso; a destra dove va a collegarsi ad un punto a quota 4, viene dall'alto.

$$f(-2) = 1 \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -4 \qquad \lim_{x\to2^-} f(x) = -1 \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 2$$





In maniera simile, se per un certo valore finito a, i limiti sinistro e destro coincidono, si può usare la notazione

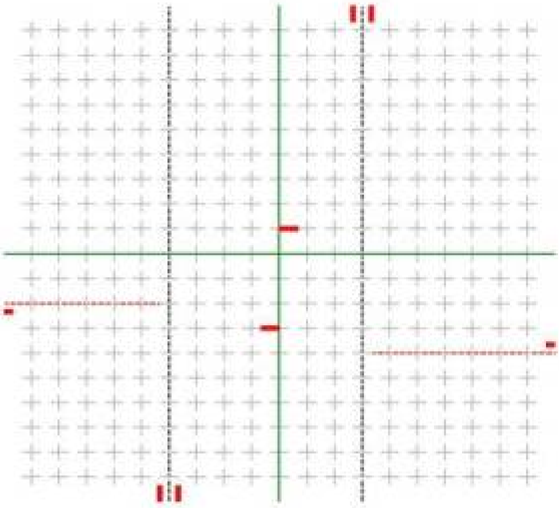
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

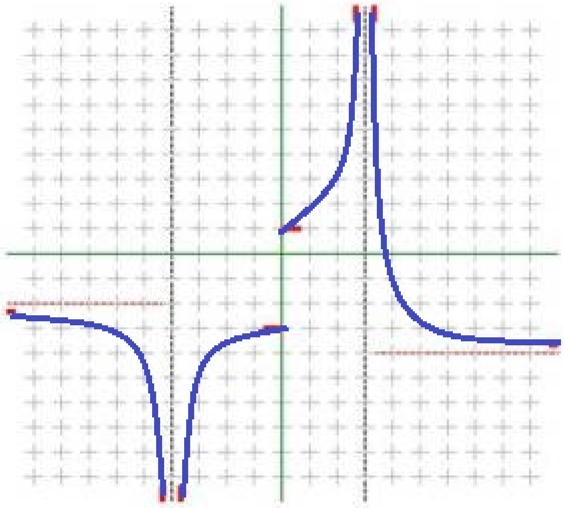
come sostitutiva della doppia scrittura

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Se il limite è infinito, l'asintoto verticale viene "schiacciato" dai due lati, come questo esempio che contiene un limite a $-\infty$ e uno a $+\infty$.

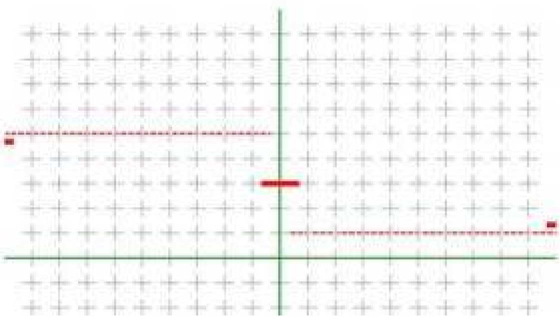
$$\lim_{x\to -4} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -4$$

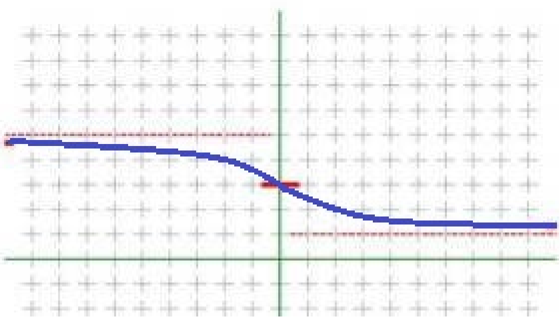




Più sottile la situazione quando il limite è finito: essa è molto vicina a quella in cui $f(a) = L$, con l'unica differenza che, nel caso del limite, in corrispondenza della linea verticale $x = a$ c'è un'interruzione (evidenziata dal trattino orizzontale formato dall'unione dei due beccucci) anziché passare dal punto: vengono mostrate in parallelo le due situazioni, con i rispettivi grafici per mettere in risalto la sottilissima differenza.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 5 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$





$$f(0) = 3 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 5 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$