

Intervallo

Un intervallo è un sottoinsieme dei numeri reali privo di interruzioni. Escludendo il caso dell'intervallo corrispondente all'intero insieme \mathbb{R} , esso deve essere limitato a destra e/o a sinistra. Rappresentando l'insieme \mathbb{R} con una retta orizzontale, un intervallo limitato da entrambe le parti è un segmento, quelli a cui manca un estremo si rappresentano con una semiretta. Da notare che, dati due numeri reali, essi dividono la retta in un intervallo limitato (al centro) e due intervalli illimitati. Nell'esempio raffigurato qui sotto la retta viene divisa dai valori -3 e 0 : si ottengono, guardando da sinistra verso destra

- Un intervallo illimitato a sinistra e limitato a destra dal valore -3 .
- Un intervallo limitato compreso tra -3 e 0 .
- Un intervallo illimitato a destra e limitato a sinistra dal valore 0 .

Ognuno degli estremi di un intervallo illimitati possono appartenere o no all'intervallo: ovvero possono partire dall'estremo sinistro oppure subito dopo, e possono arrivare all'estremo destro o fermarsi subito prima. Un intervallo illimitato, i cui estremi sono due numeri reali a e b (con $a < b$) si indica mettendo l'espressioni a, b tra parentesi quadre rivolgendo ognuna di queste verso l'interno se l'estremo appartiene all'intervallo, verso l'esterno se non vi appartiene. Per esempio, l'intervallo compreso fra -3 e 0 si indica in uno di questi modi

$[-3, 0]$	estremi compresi
$[-3, 0[$	-3 compreso, 0 escluso
$] - 3, 0]$	-3 escluso, 0 compreso
$] - 3, 0[$	estremi esclusi

Per quanto riguarda gli intervalli illimitati, il problema riguarda solo l'estremo presente. L'estremo assente viene indicato con la notazione ∞ che rappresenta l'infinito, un numero superiore a qualunque altro numero: esso non sarà mai compreso nell'intervallo (visto che non è un numero reale) pertanto la parentesi vicino ad esso sarà sempre rivolta all'esterno. Ritornando all'esempio dell'intervallo diviso dai valori -3 e 0 , dopo aver visto (tabella precedente) come possa presentarsi l'intervallo limitato, ovvero quello centrale, ecco come si presenta ognuno degli due intervalli illimitati (quello a sinistra e quello a destra):

Sinistra		Destra	
$] - \infty, -3]$	-3 compreso	$[0, +\infty]$	0 compreso
$] - \infty, -3[$	-3 escluso	$]0, +\infty]$	0 escluso

Altra importante particolarità di ∞ è che va sempre specificato il segno, che altrimenti rimane indefinito: non è invece così per i numeri, dove l'assenza di segno ne sottintende uno positivo (ad esempio non c'è alcuna differenza fra 2 e $+2$)

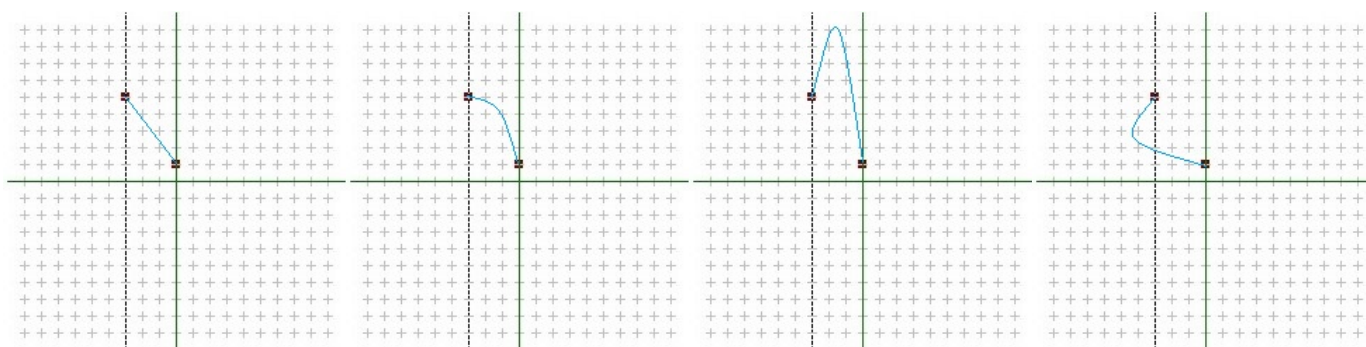
Funzioni continue in intervalli limitati

Il grafico di funzione avente come dominio un intervallo limitato di estremi a e b è compresa all'interno della striscia verticale delimitata dalle rette $x = a$ e $x = b$. Per il momento si suppone che l'intervallo sia della forma $[a, b]$, ovvero comprenda entrambi gli estremi. Definendo $f(a)$ e $f(b)$ il grafico di una simile funzione continua sarà un collegamento fra il punto $(a, f(a))$ e il punto $(b, f(b))$: il collegamento più comodo sarà quello rettilineo, ma nulla vieta di tracciare una qualsiasi linea continua che li colleghi, purché non torni mai indietro (altrimenti non sarebbe una funzione), mentre sono ammissibili i saliscendi. Ecco tre esempi di rappresentazione di una funzione continua così definita, seguiti da un quarto esempio, che però è sbagliato, in quanto il grafico ritorna indietro.

$$f : [-3, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(-3) = 5$$

$$f(0) = 1$$



Se manca uno o entrambi gli estremi, non può essere definito $f(c)$ per il valore di quell'estremo, in quanto tale c non fa parte del dominio.

Questo viene supplito con la definizione di limite. La scritta sottostante significa approssimativamente “per valori vicini a c la funzione assume valori vicini a d ” (la definizione rigorosa è più complicata).

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$$

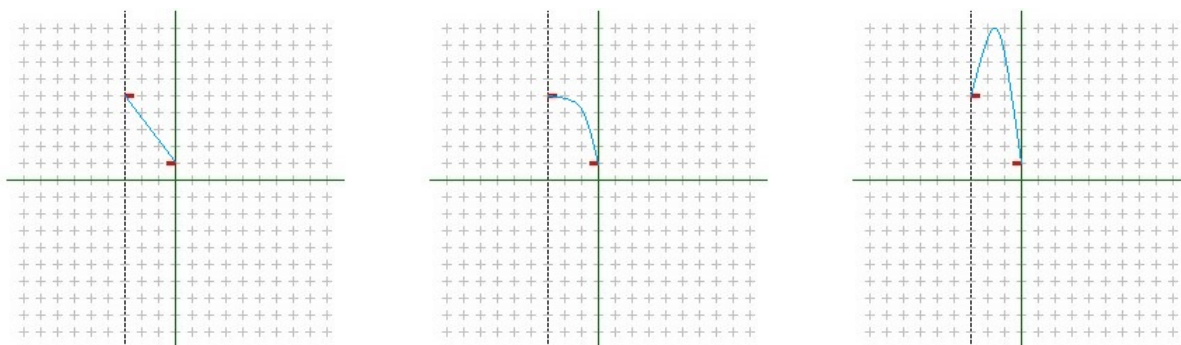
Ecco un esempio: è quasi uguale a quello precedente, ma mancano gli estremi del dominio e, per ciascuno di essi, la scritta $f(c) = d$ è stata sostituita da $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$.

$$f :] - 3, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$$

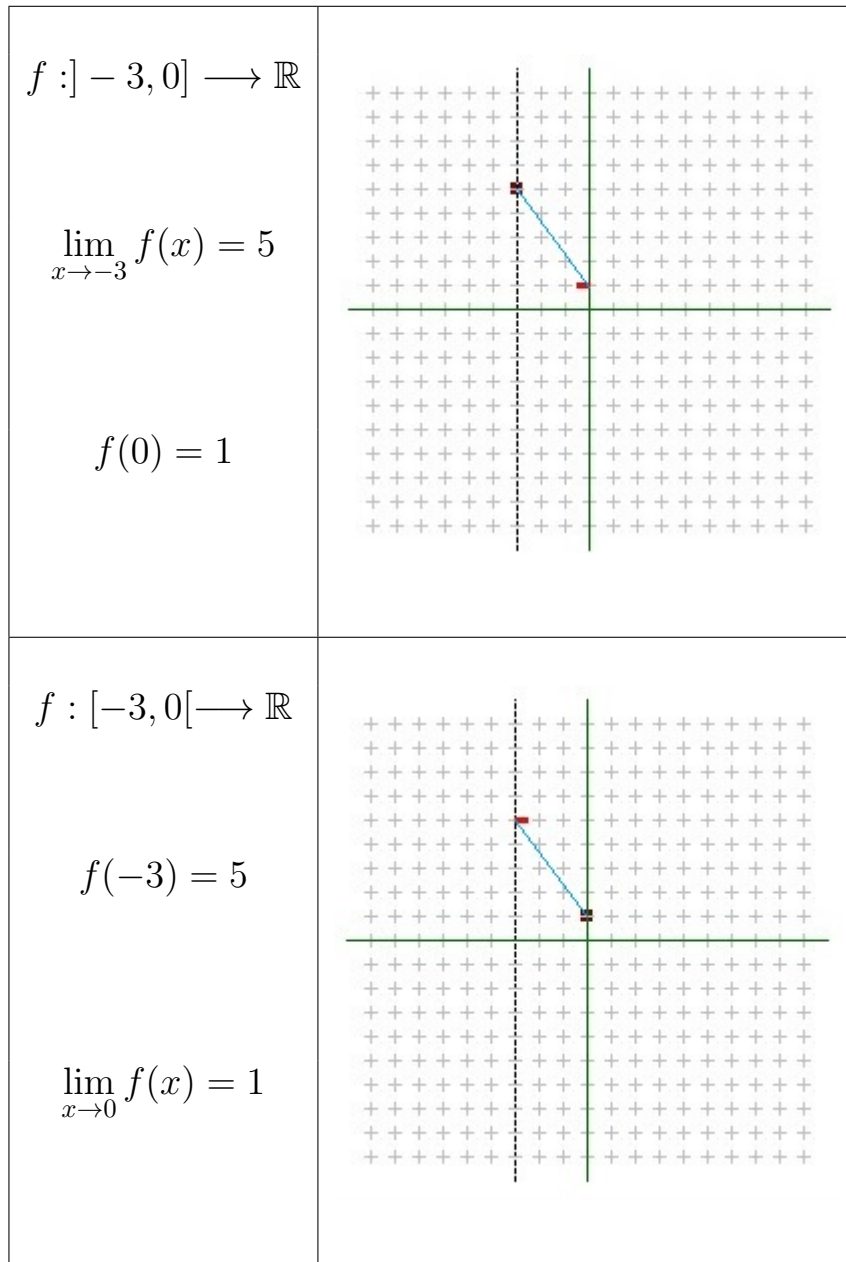
$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Qui sotto i possibili grafici di questa funzione: sono identici alla precedente, l'unica differenza sta nel fatto che gli estremi vengono esclusi, pertanto i “puntoni” del grafico precedente (indicanti l'appartenenza al grafico) sono stati sostituiti da beccucci rivolti verso l'interno (non indispensabili, ma si vedrà in seguito la loro utilità).



Si contempla anche il caso in cui uno solo dei due estremi sia presente. In questo caso in corrispondenza di un estremo viene specificato il valore della funzione, dell'altro si specifica il limite: e nel grafico apparirà un puntone e un beccuccio. Si rappresentano due esempi, ancora una volta analoghi ai precedenti, in cui viene tolto prima un estremo e poi l'altro: per brevità viene mostrato solo il grafico rettilineo, ma ancora una volta non è strettamente indispensabile che lo sia.



Senza tratti orizzontali

Si supponga di dover rappresentare questa funzione continua (la presenza o assenza degli estremi cambia molto di poco il grafico)

$$f :]1, 4] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 \qquad f(4) = -1$$

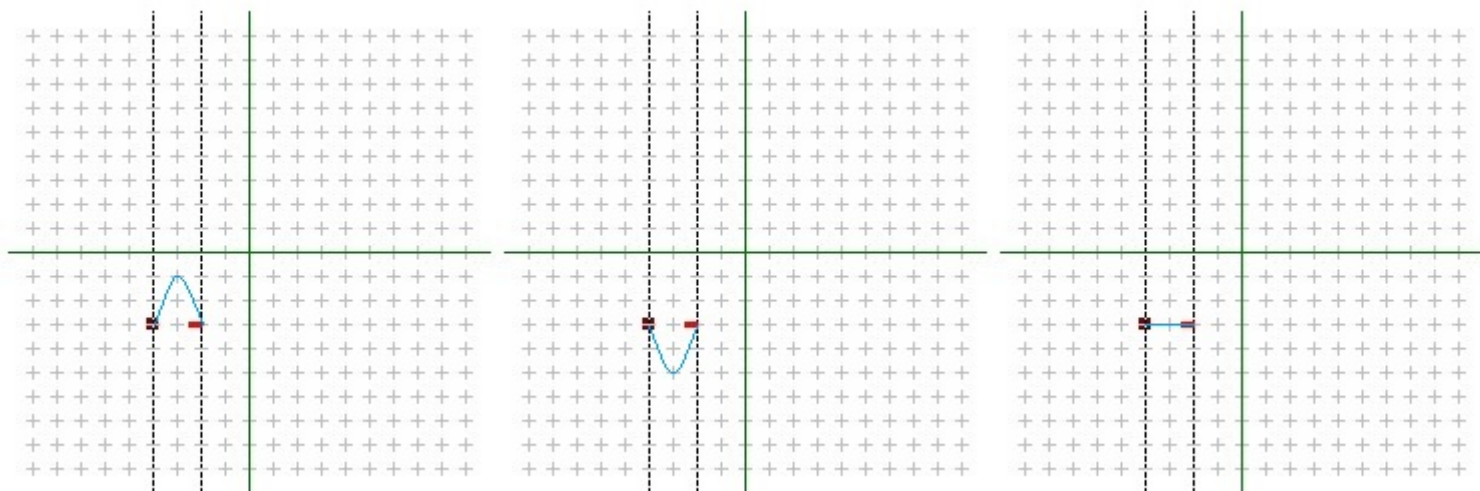
Una possibile rappresentazione è la seguente.

Tuttavia sarebbe errata se venisse richiesto di rappresentarla “senza tratti orizzontali”. Se in questo caso un grafico rettilineo rispetterebbe la condizione, la situazione si complica quando i valori agli estremi (il valore $f(x)$ quando è compreso, il limite quando è escluso) sono uguali, perchè un collegamento rettilineo sarebbe orizzontale. Tuttavia il problema è facilmente risolvibile facendola passare in alto o in basso.

Si supponga ad esempio di dover rappresentare la funzione continua senza tratti orizzontali

$$f : [-4, -2[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(-4) = -3 \qquad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$$

Due possibili soluzioni (fra le più semplici, potrebbero avere anche tanti saliscendi) sono quelle a sinistra, mentre quella a destra è errata, in quanto non verifica la condizione “senza tratti orizzontali”.



Asintoti verticali

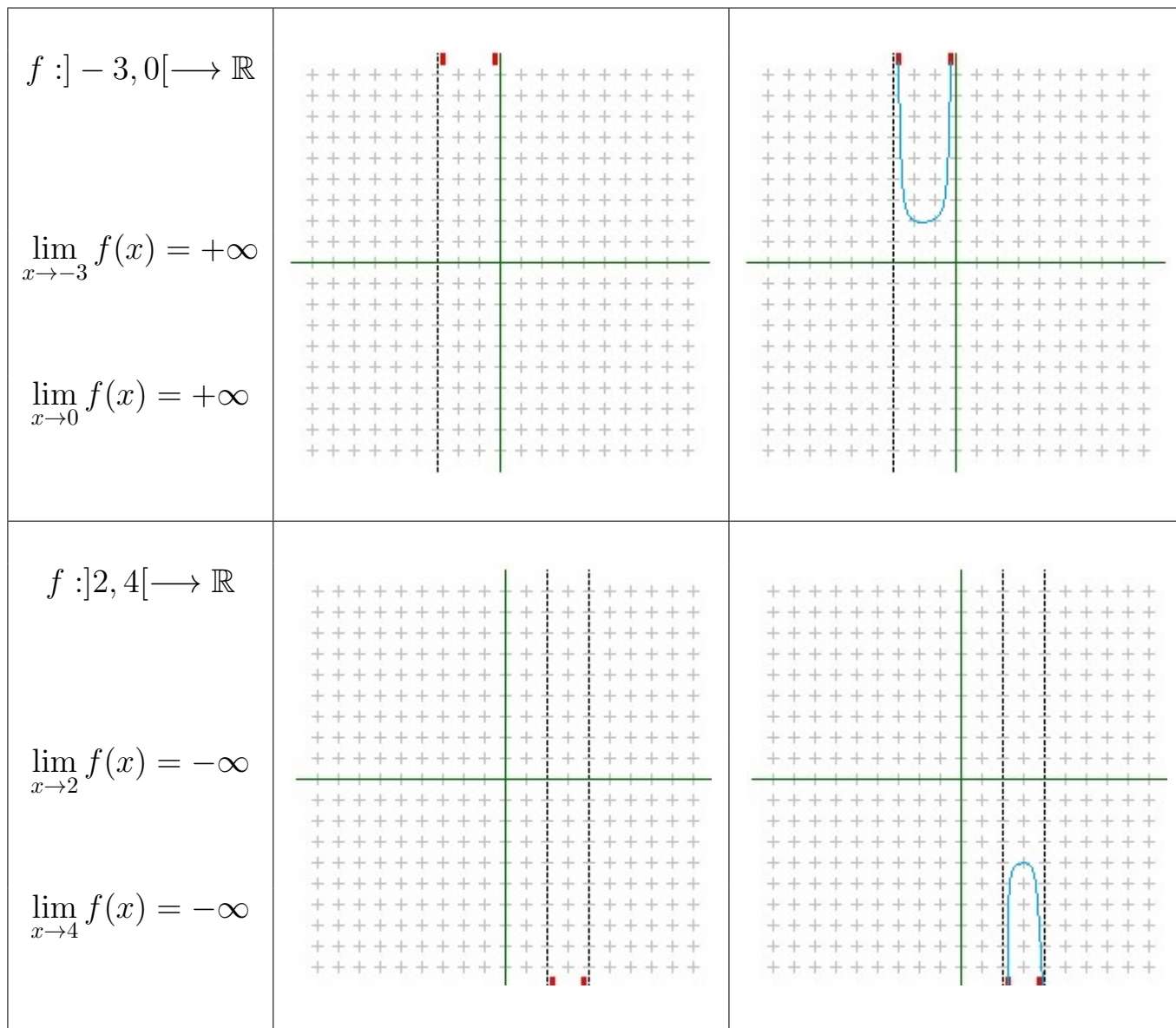
Si è visto che in corrispondenza di un estremo mancante, si definisce per tale valore il limite. Se tale limite vale L significa che nei dintorni dell'estremo la funzione assume valori "vicino a L ". Questo L può essere anche infinito, e per "vicino a infinito" si intende valori molto grandi (positivi o negativi a secondo del segno). Il grafico, avvicinandosi a tale estremo, schizza in alto (se il limite è $+\infty$) o in basso (quando è $-\infty$): la retta verticale che delimita la striscia è un asintoto, ossia una retta acui il grafico della funzione si avvicina senza mai toccarla, raggiungendo valori sempre più alti (o più bassi) man mano che si avvicina, diventando sempre più verticale (ma mai veramente verticale): proprio per questo, il collegamento non può essere rettilineo.

Da notare che in corrispondenza di un asintoto verticale, l'estremo non c'è di sicuro, mentre l'altro estremo può esserci o non esserci.

In fase di costruzione è utile mettere in corrispondenza dell'asintoto una lineetta verticale. Ecco alcuni esempi, per ognuno dei quali vengono rappresentate due fasi: nella prima si segna cosa succede agli estremi, nella seconda si rappresenta il collegamento.

$f :]-3, -1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$ $f(-1) = 0$		
$f :]0, 3[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$		
$f :]2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ $f(5) = -1$		
$f :]-4, -2[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -3$ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$		

In un intervallo senza estremi può anche capitare che entrambi i limiti siano infiniti:



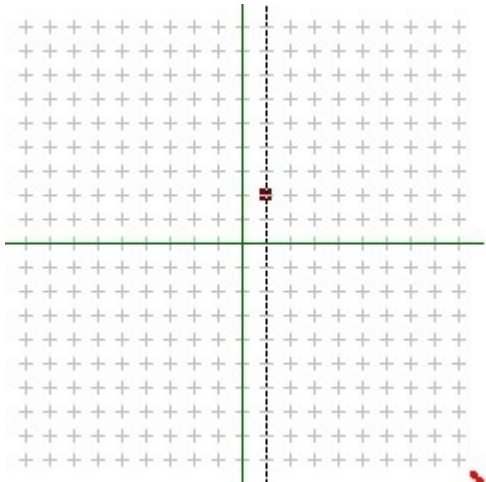
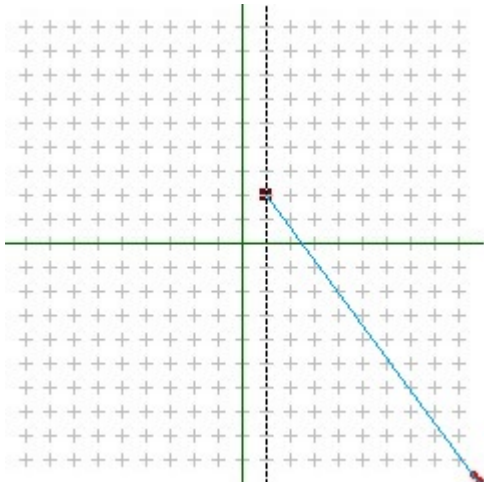
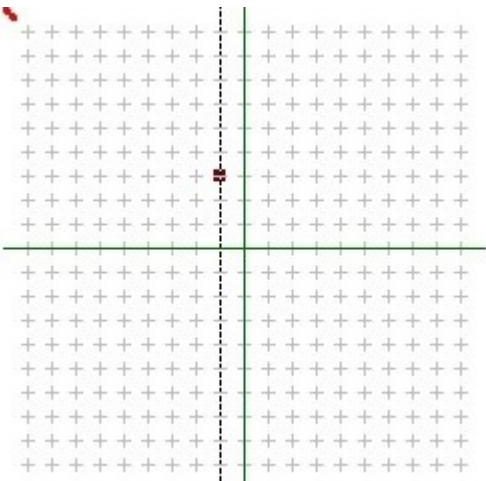
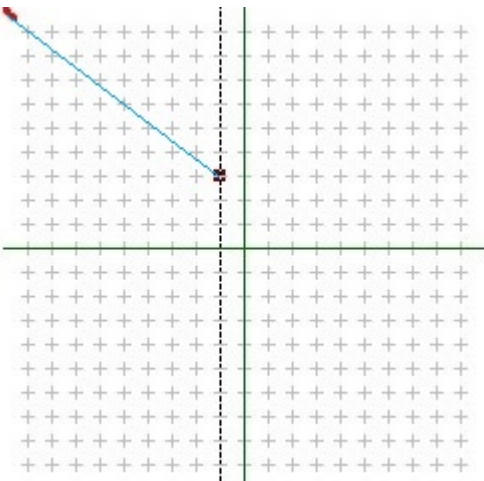
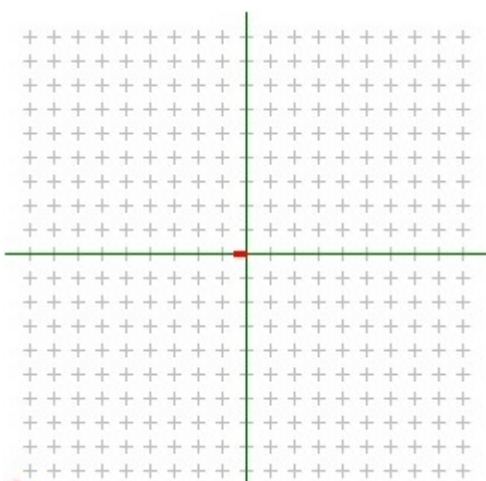
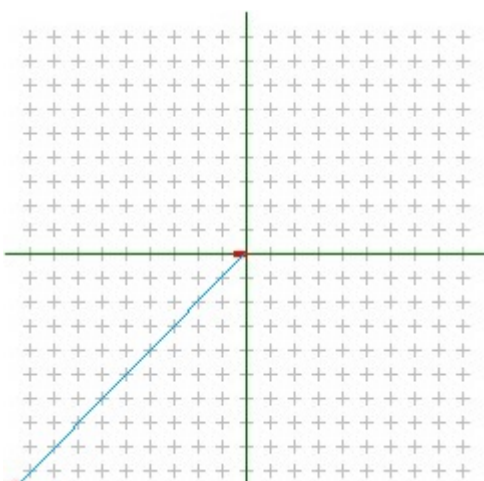
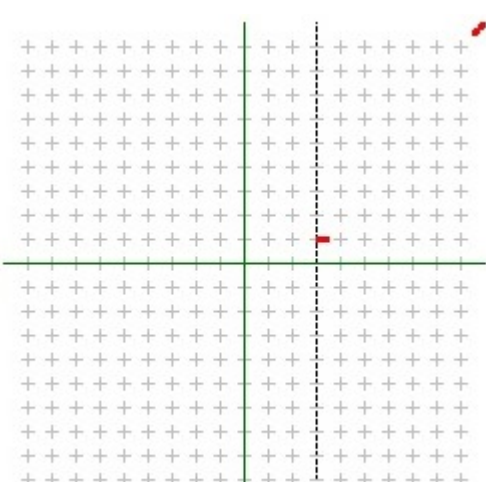
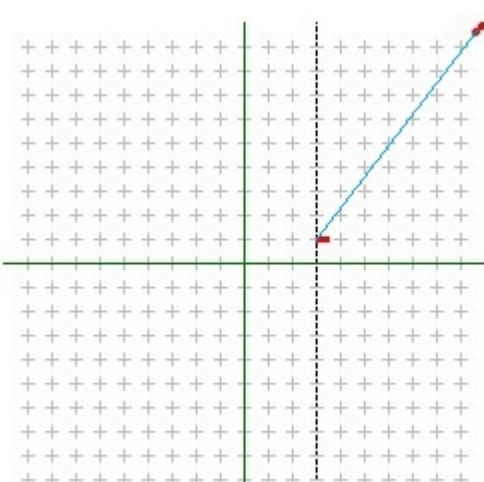
Da notare che in ognuno dei due estremi si segna un puntone (se l'estremo è compreso), un lineetta orizzontale verso l'interno (se l'estremo non è compreso e il limite è finito) o una lineetta verticale accanto all'asintoto in alto o in basso (se l'estremo non è compreso e il limite è infinito): il collegamento non deve necessariamente sovrapporsi con le lineette, esse servono solo a dare l'idea di come collegare i due estremi.

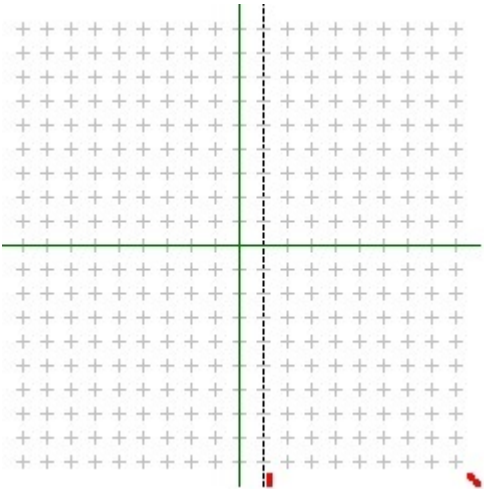
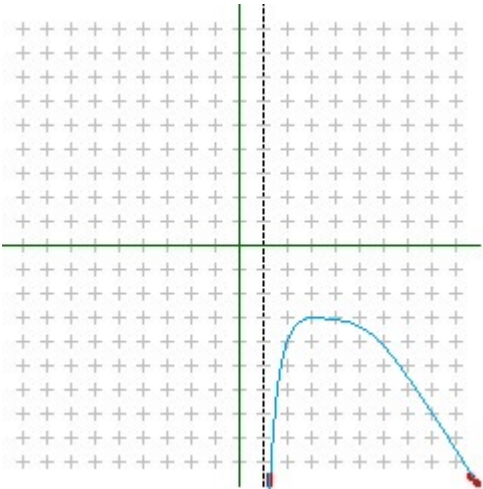
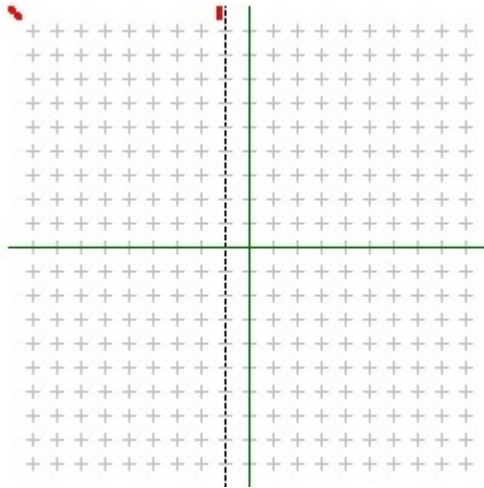
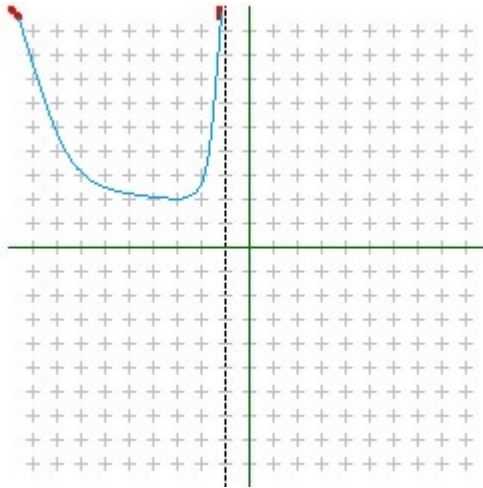
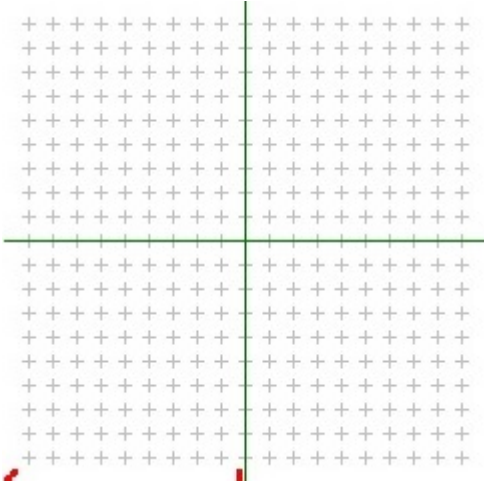
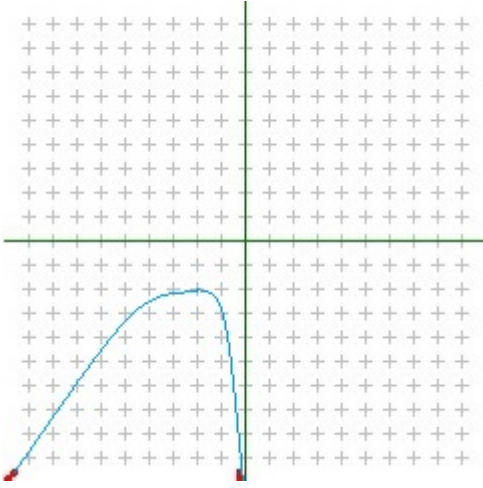
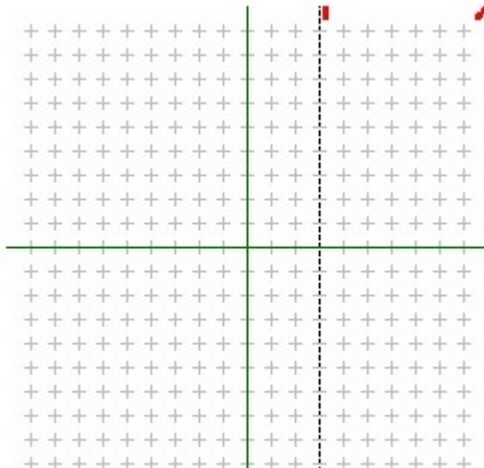
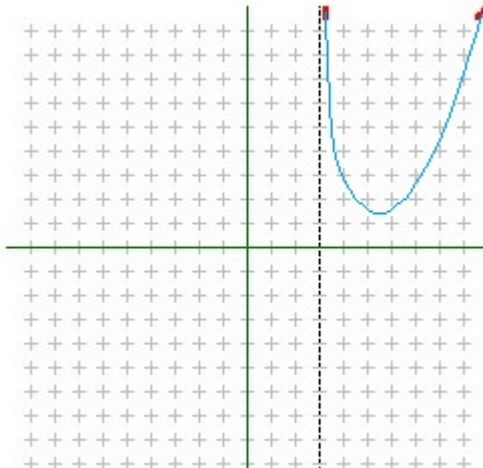
Funzioni continue in intervalli illimitati

Si è visto precedentemente che, se un estremo c dell'intervallo (o anche entrambi) non è incluso, si definisce $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, che definisce cosa succede “per valori vicini a c ”. Nel caso di intervalli illimitati, uno dei due estremi è infinito, e per analogia si definisce $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Il segno di infinito è positivo o negativo a secondo che l'intervallo sia illimitato rispettivamente a destra o a sinistra, e significa cosa succede “per valori vicini a infinito”, ossia “per valori molto grandi”, cioè all'estremità destra o sinistra. In questo paragrafo si suppone che il valore limite sia anch'esso infinito. In questo caso il grafico finisce in un angolo, determinato dal suo segno. Si ha pertanto:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	angolo in alto a destra
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	angolo in basso a destra
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	angolo in alto a sinistra
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	angolo in basso a sinistra

Se l'altro estremo è compreso nell'intervallo, oppure se il limite è finito, il collegamento può anche essere rettilineo. Se invece anche l'altro estremo ha limite infinito, allora il collegamento non può essere rettilineo, in quanto c'è un asintoto verticale: se i limiti (entrambi infiniti) sono positivi il grafico scende e poi risale, se sono negativi il grafico sale e poi scende. Ecco due serie di esempi: gli intervalli dalla prima alla seconda serie sono gli stessi, ma negli esempi della prima tabella l'estremo finito è compreso oppure, se escluso, il limite è finito (come già spiegato, cambia solo per la presenza della lineetta o del puntone), in quelli della seconda c'è un asintoto verticale. Anche in questi casi viene prima mostrato lo schema di base, che in questo caso comprende una lineetta diagonale in corrispondenza dell'angolo interessato, oltre alla rappresentazione nell'altro estremo che consiste, come già visto negli intervalli finiti, in un puntone, in una lineetta orizzontale o in una lineetta verticale.

$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $f(1) = 2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$		
$f :]-\infty, -1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $f(-1) = 3$		
$f :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$		
$f :]3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$		

$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$		
$f :]-\infty, -1[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$		
$f :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$		
$f :]3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$		

Asintoti orizzontali

Nel paragrafo precedente, è stata mostrata la situazione in cui il limite all'infinito sia infinito (con il corrispondente grafico che finiva in un angolo). Resta da considerare la situazione in cui tale limite sia finito, ovvero il caso in cui, per un valore L finito, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

In realtà non si troverà semplicemente ∞ bensì $-\infty$ (estrema sinistra del piano) o $+\infty$ (estrema destra). L'espressione significa che per valori vicini a ∞ , (cioè molto grandi, quindi all'estremità destra o sinistra del piano), la funzione assumerà valori vicini a L . Ecco allora come si costruisce il grafico di una simile funzione. Si suppone che l'altro estremo (che verrà chiamato a) sia incluso e che sia $f(a) = b$. Questi sono i passaggi da effettuare:

1. Si traccia la linea verticale $x = a$ che delimita la striscia.
2. Si segna su tale linea il punto ad altezza b
3. Si traccia a sinistra o a destra (dipende dal segno di ∞) di tale linea una semiretta orizzontale ad altezza c .

A questo punto, il grafico potrebbe da un certo punto in poi coincidere con tale semiretta, che si chiama *asintoto orizzontale*. Ma, ancora una volta, verrà posta la condizione “senza tratti orizzontali” che esclude la possibilità appena citata. Il grafico si avvicina sempre di più all'asintoto senza mai toccarlo. Si avvicina dall'alto o dal basso? Indifferente, ma per rendere il grafico quanto più semplice possibile, è meglio sia dalla parte del valore b , quindi dall'alto se $b > c$, dal basso se $c < b$. Verrà trattato a parte il caso in cui $c = b$. In fase di costruzione, è utile mettere all'estremità sinistra o destra del piano, tracciare una lineetta orizzontale dove dovrà passare il grafico (immediatamente sopra o sotto l'asintoto). Pertanto il grafico si completa in questa maniera.

4. Si traccia una lineetta orizzontale in corrispondenza dell'asintoto
5. Si collega il punto con la lineetta

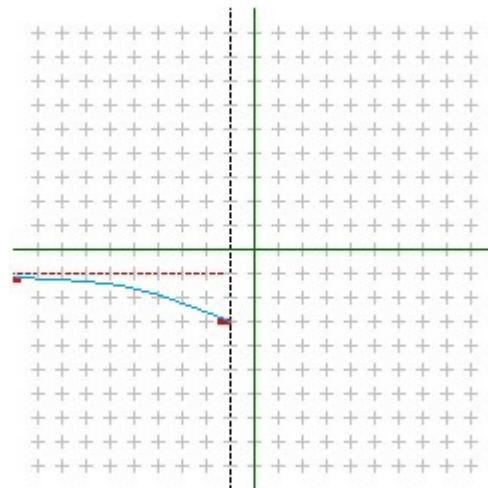
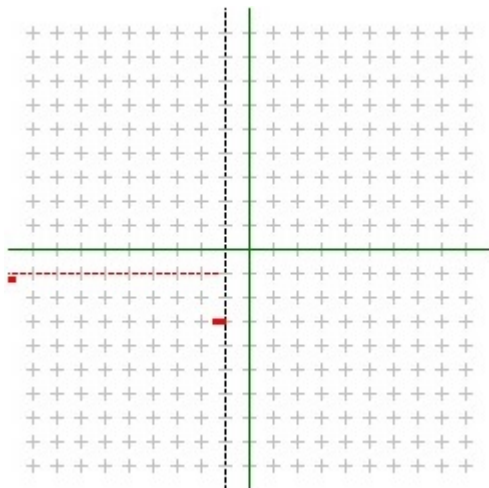
Nulla cambia se l'estremo dalla parte limitata non c'è e anziché $f(a) = b$ si ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (a parte, come al solito, il fatto che il puntone viene rimpiazzato da una lineetta orizzontale verso l'interno)

Ecco pertanto degli esempi, in cui ancora una volta si mostra prima la costruzione con i due elementi da collegare, e poi il collegamento stesso. Negli esempi della prima tabella l'avvicinamento all'asintoto orizzontale avviene dal basso (coerentemente con la posizione del limite o del punto nell'altro estremo), in quelli della seconda avviene dall'alto.

$$f :] - \infty, -1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

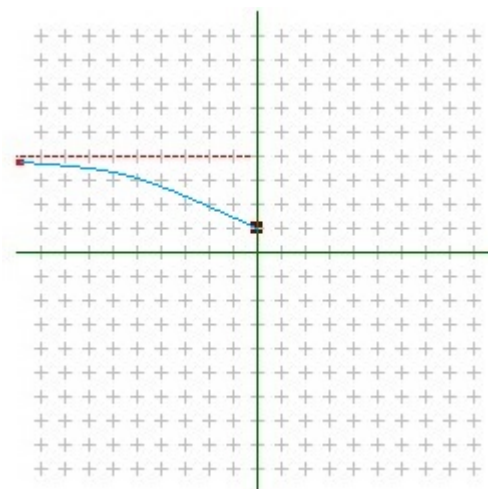
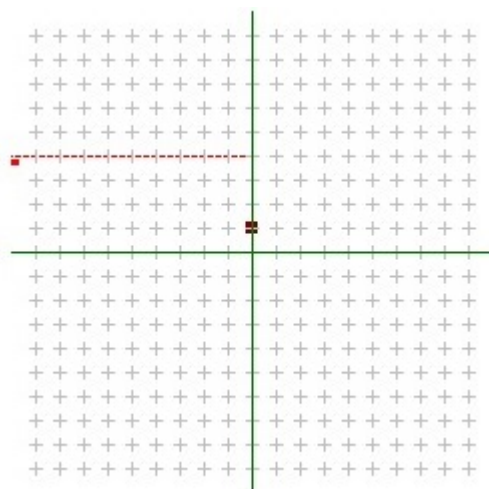
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -3$$



$$f :] - \infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$$

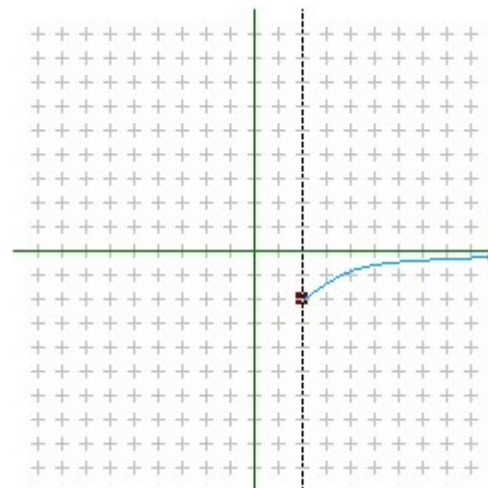
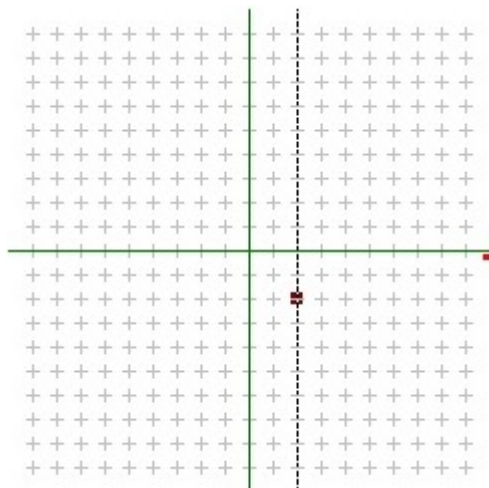
$$f(0) = 1$$



$$f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(2) = -2$$

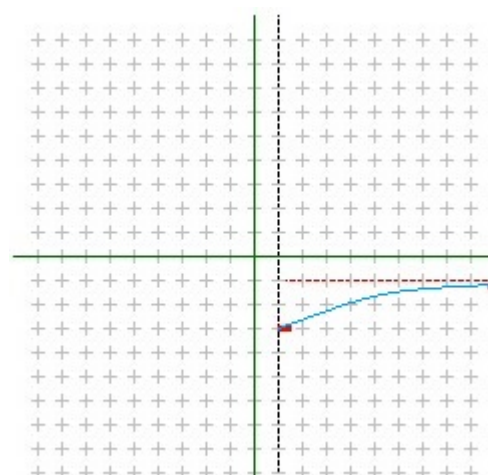
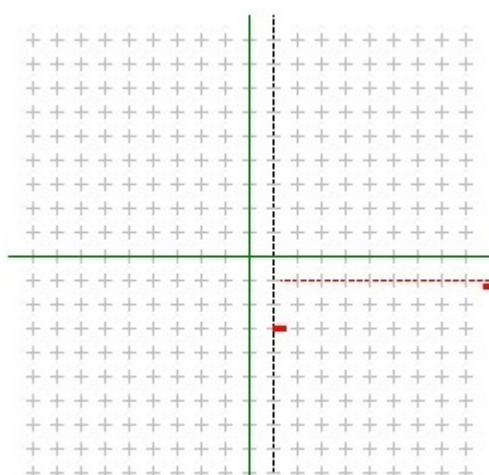
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

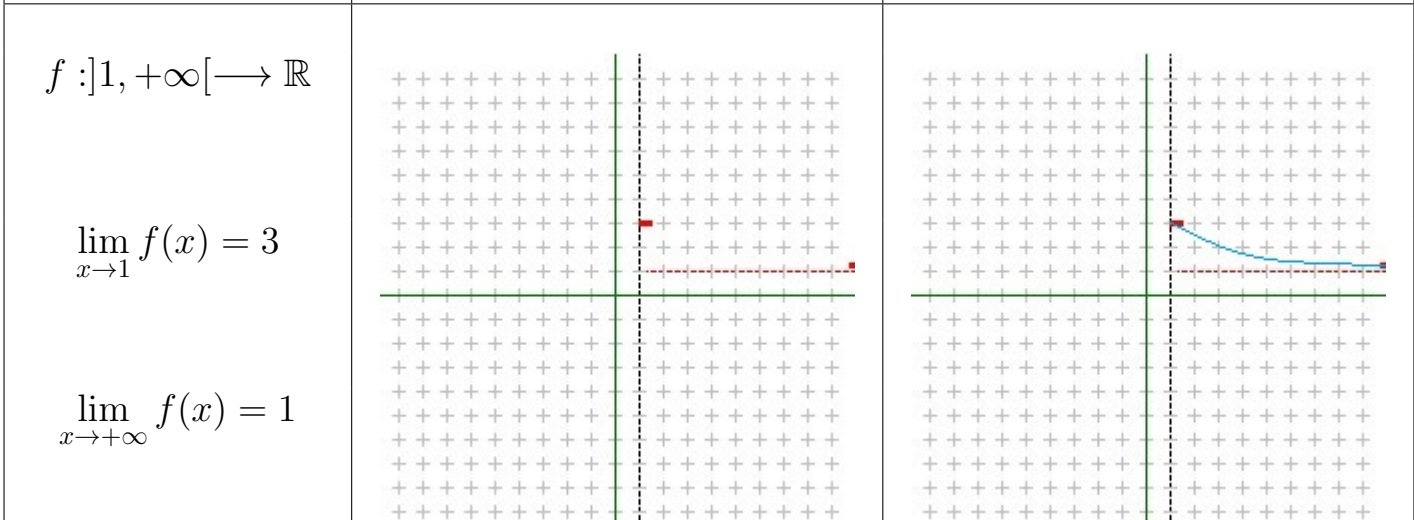
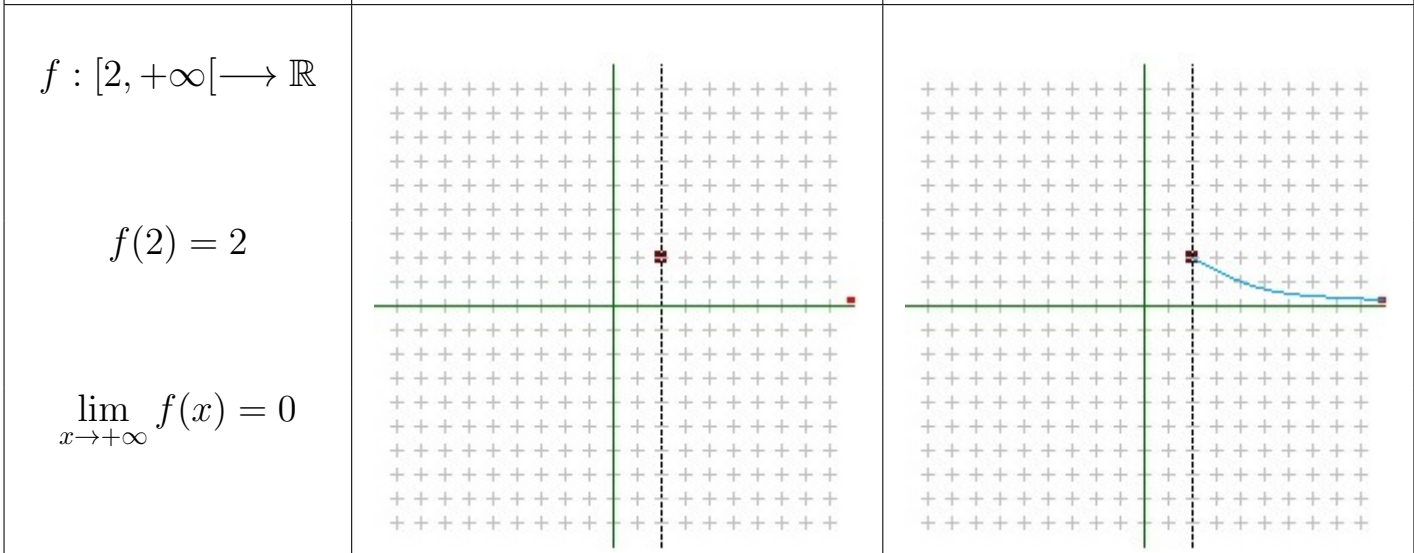
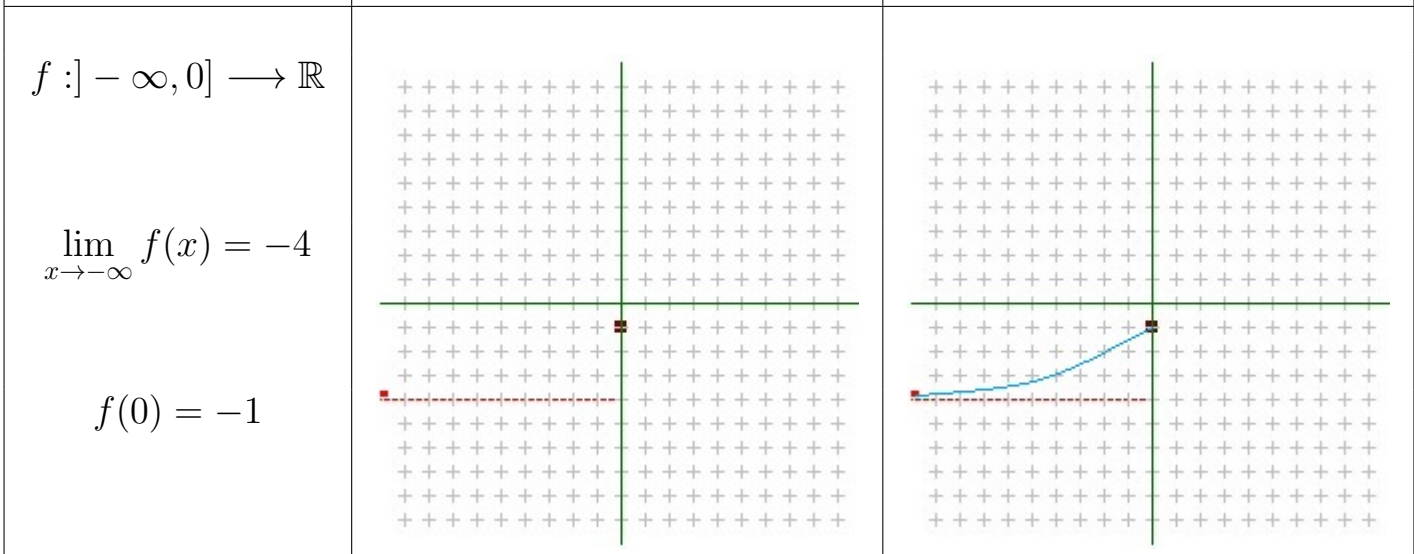
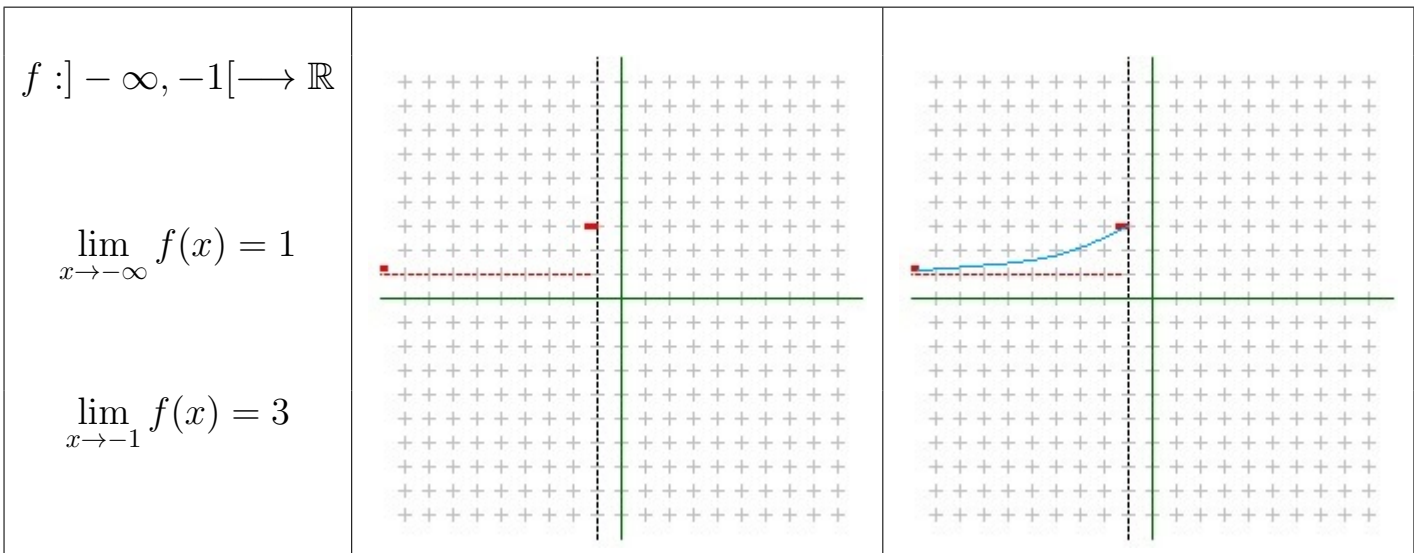


$$f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

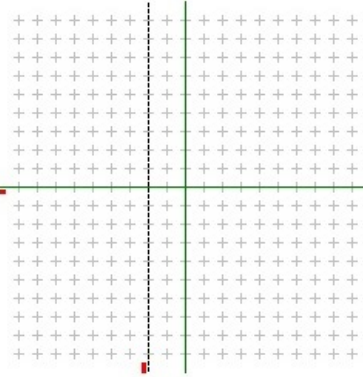
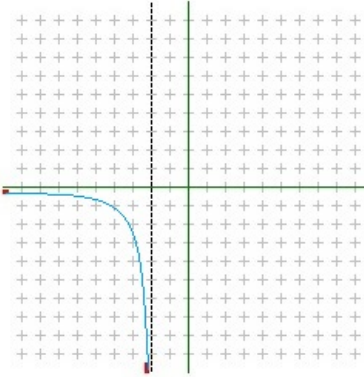
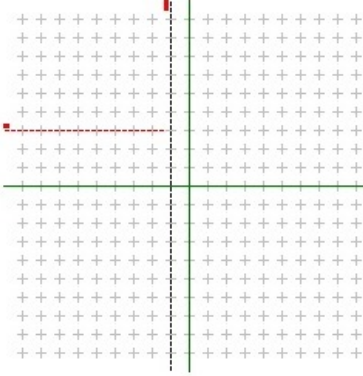
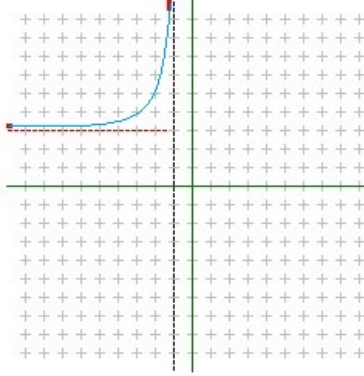
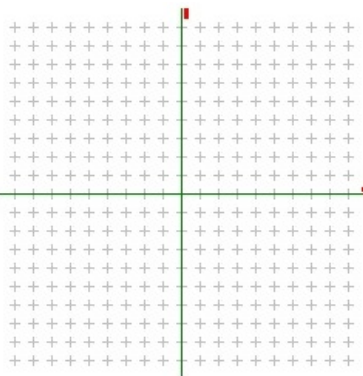
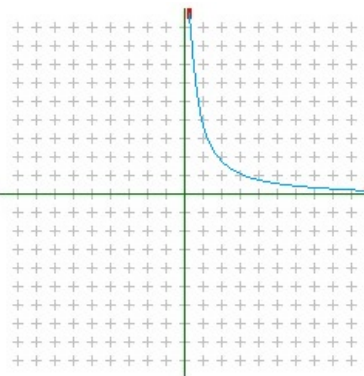




Se invece le due entità sono alla stessa quota, il collegamento può avvenire indifferente-
 temente dall'alto o dal basso: negli esempi che seguono vengono mostrate entrambe le
 possibilità, ma ne va tracciata soltanto una (a scelta).

$f :] - \infty, -1[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$			
$f :] - \infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ $f(0) = -3$			
$f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $f(2) = 2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$			
$f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -4$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$			

C'è anche la possibilità che all'estremità limitata dell'intervallo il limite sia infinito: questo significa dover collegare un asintoto orizzontale con uno verticale.

$f :] - \infty, -2[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$		
$f :] - \infty, -1[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$		
$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$		
$f :]2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$	