GRAFICO DI UN FATTORE

Questo paragrafo mostrerà come disegnare il grafico di $y = f(x)$ dove $f(x)$ è uno dei fattori (con esponente) di un polinomio scomposto. Per semplicità si considereranno solo costanti e binomi monici e gli esponenti non andranno oltre il 2 (il che equivale a dire che vale 2 oppure non c'è). Ecco tutti i possibili casi: la lettera k va sempre considerata senza segno, per cui verranno eventualmente distinti i casi in cui k può essere negativo. Oltre che il grafico, si specifica dove esso è positivo (cioè sopra l'asse orizzontale), negativo (sotto di esso) o zero (su di esso): nelle due note successive si spiega il significato dei termini "separazione per $x = \ldots$" e "parabola unitaria" che compaiono nella tabella.

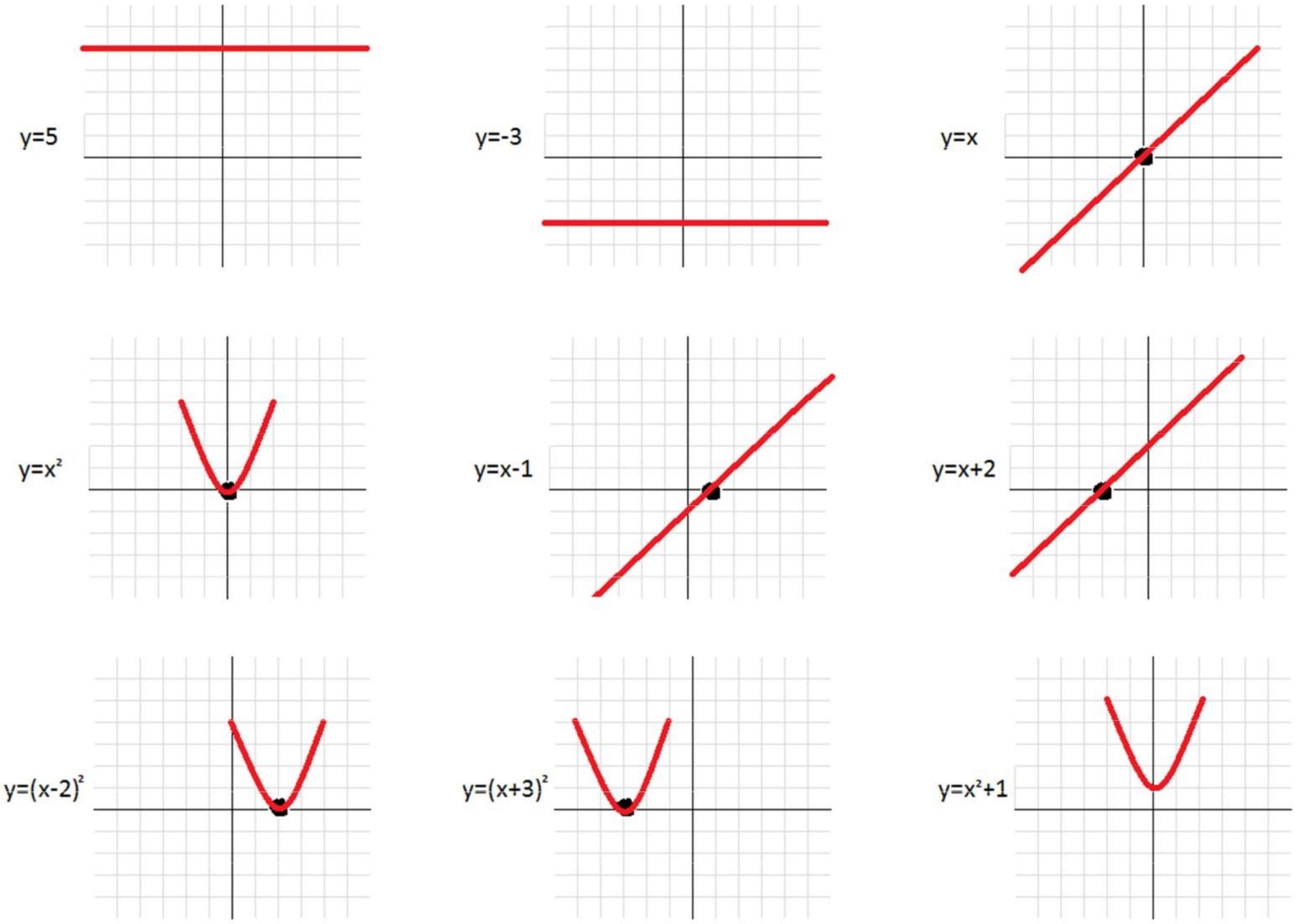
$\mathbf{y} =$	GRAFICO	SEGNO
k	Retta orizzontale a quota k	Sempre positivo
$-k$	Retta orizzontale a quota $-k$	Sempre negativo
x	Retta obliqua passante per l'origine	Separazione per $x = 0$
x^2	Parabola unitaria con vertice nell'origine	Zero per $x = 0$, positivo altrove
$x - k$	Retta obliqua passante per $(0, -k)$ e per $(k, 0)$	Separazione per $x = k$
$x + k$	Retta obliqua passante per $(0, k)$ e per $(-k, 0)$	Separazione per $x = -k$
$(x - k)^2$	Parabola unitaria con vertice sull'asse orizzontale a $x = k$	Zero per $x = k$, positivo altrove
$(x + k)^2$	Parabola unitaria con vertice sull'asse orizzontale a $x = -k$	Zero per $x = -k$, positivo altrove
$x^2 + k$	Parabola unitaria con vertice sull'asse verticale ad altezza k	Sempre positivo

Da notare che ogni funzione vale zero esattamente in corrispondenza della sua radice (sempre ve ne sia una).

NOTA 1: una parabola unitaria con vertice (x, y) viene individuata da due punti $(x \pm 1, y + 1)$: in pratica oltre al vertice si segnano altri due punti spostandosi in su di un'unità e a destra e a sinistra di un'unità.

NOTA 2: con "separazione per $x = T$" si intende: negativo a sinistra di T, zero in T, positivo a destra di T.

Nel seguito un esempio per ognuna delle situazioni presentate: in presenza di una radice, essa viene evidenziata.



Viene riportato qui sotto lo schema del segno di ognuna delle funzioni rappresentate, ovvero si mostra dove il valore di y è positivo,negativo o nullo. La barra verticale, dove c'è un "puntone" rappresenta la radice, dove la y vale0 (ossia si trova sull'asse orizzontale): i segni a sinistra e a destra rappresentano il segno di y per valori di x rispettivamente minore e maggiore della radice. In assenza di radici non vi è alcuna barra e il segno è unico. Viceversa, non è scontato che una radice separi segni positivi da quelli negativi: nelle parabole con vertice sull'asse orizzontale, pur essendoci una radice, entrambi i segni sono positivi.

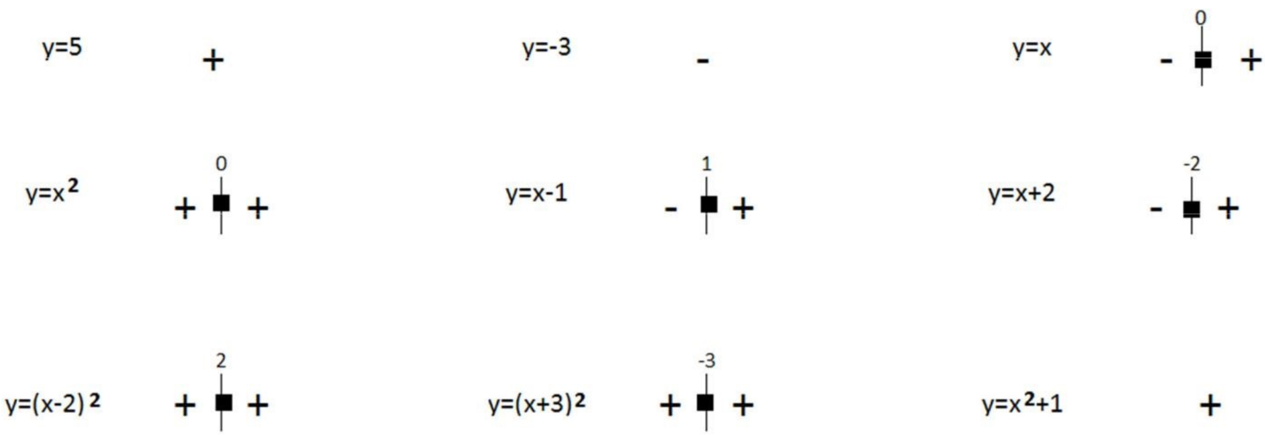
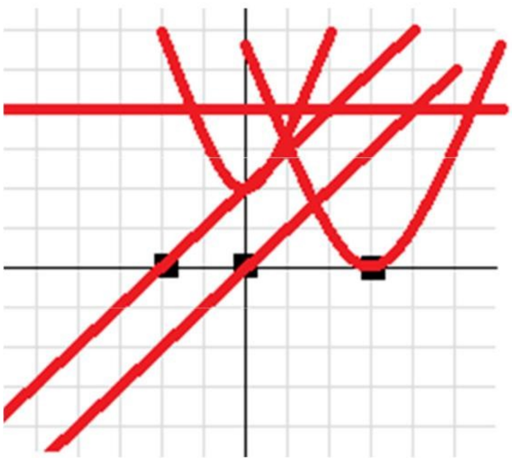


GRAFICO DEI FATTORI E DEL PRODOTTO

Ora si considerano le funzioni costituite da un prodotto di quelle considerate in precedenza: questa la procedura per disegnarne il grafico (in realtà molto approssimativo):

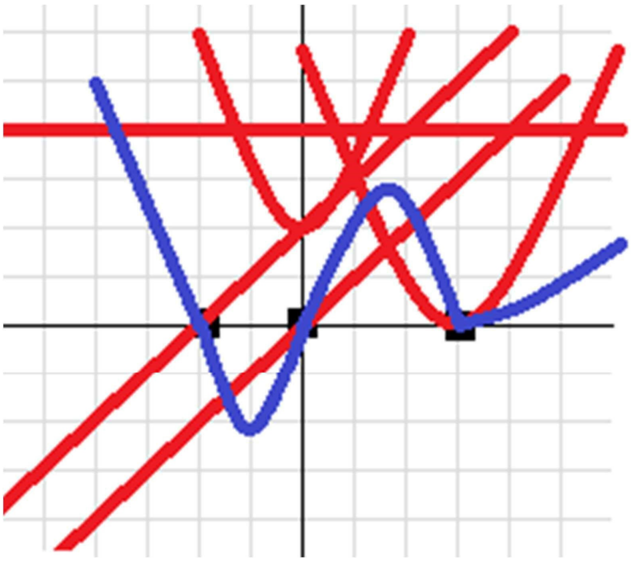
1. Trovare le radici, ordinate in modo crescente
2. Disegnare i grafici dei singoli fattori
3. Creare lo schema dei segni
4. Calcolare il prodotto dei segni
5. Disegnare il grafico seguendo il segno del prodotto

Ecco un esempio: la funzione $y = 4x(x^2 + 2)(x - 3)^2(x + 2)$
Le radici (in ordine crescente) sono -2 $\quad 0 \quad$ 3
Dopo averle segnate sull'asse orizzontale, si disegnano i grafici (su un unico piano cartesiano) come qui sotto a sinistra



		-2		0		3	
4	+		+		+		+
x	-		-	●	+		+
(x^2+2)	+		+		+		+
$(x-3)^2$	+		+		+	●	+
$(x+2)$	-	●	+		+		+
	+	●	-	●	+	●	+

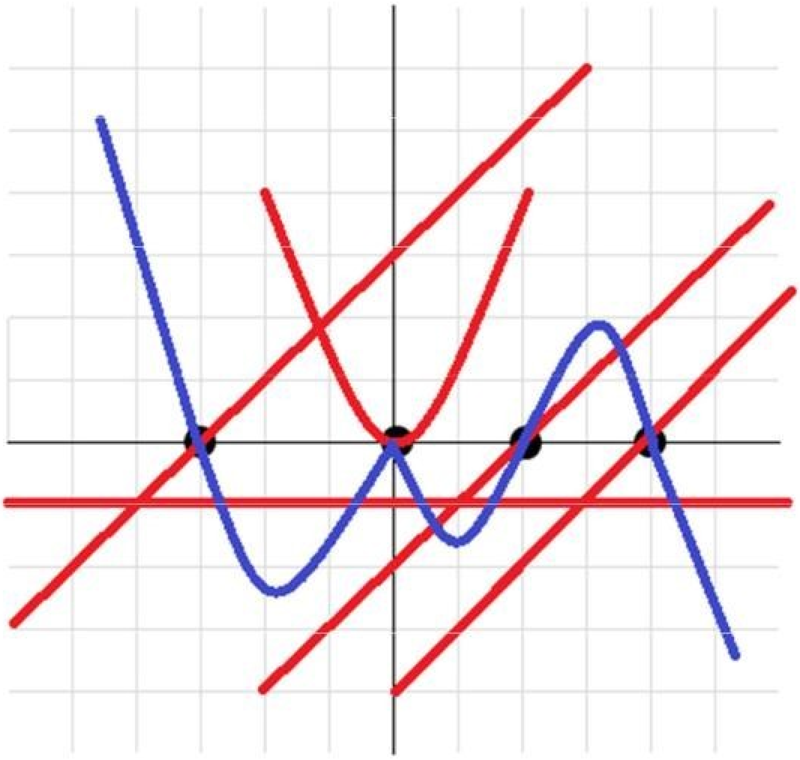
Viene poi rappresentata (qui sopra a destra) la tabella dei segni: una barra verticale per ogni radice e per ogni fattore si segna con un "puntone" la sua radice (dove la funzione vale zero), e ai lati il segno che il fattore assume a sinistra (può essere negativo o positivo) e a destra (sempre positivo). I fattori di secondo grado non hanno radici e sono sempre positivi; nemmeno le costanti hanno radici e il segno viene determinato dal valore della costante stessa (in questo caso positivo, visto che 4 lo è). La riga in fondo contiene i prodotti: su ogni radice c'è un puntone (prodotto di valori uno dei quali è zero), mentre per quanto riguarda i segni basta contare i segni negativi della colonna: se sono in numero pari il segno è positivo (come nella colonna di sinistra, che ne ha due, e le due a destra, che non ne hanno), se sono in numero dispari il segno è negativo (come la seconda colonna, che ha soltanto un segno negativo).

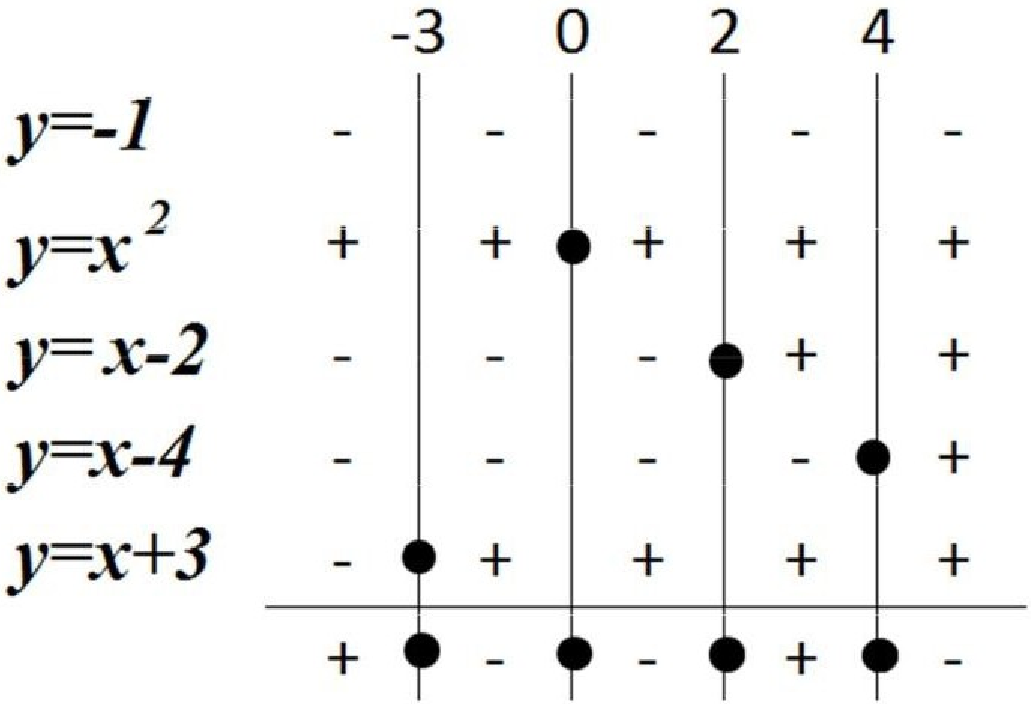


Da notare, confrontando il grafico finale con quello dei singoli fattori che, dove il grafico di un fattore attraversa l'asse, anche il grafico finale lo attraversa (come qui succede per $x = 0$ e per $x = -2$); dove il grafico di un fattore si limita a toccare l'asse ($x = 3$ in questo caso).

Ecco un altro esempio, ricordando che se davanti c'è un segno negativo senza numero, va inteso come -1:

$$y = -x^2(x-2)(x-4)(x+3)$$





Anche in questo caso, il grafico si limita a toccare l'asse orizzontale dove un fattore lo tocca senza attraversarlo (radice $x = 0$), mentre lo attraversa dove un fattore lo attraversa (tutte le altree radici).

GRAFICO DEL PRODOTTO

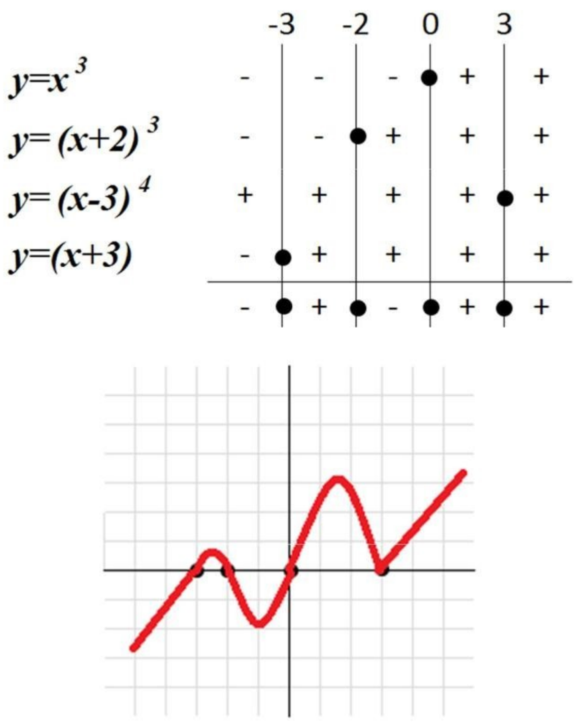
Nel paragrafo precedente si sono tracciati i grafici per studiarne il segno: se essi sono utili per rendere l'idea del segno, quest'ultimo è stato poi trovato usando le regole spiegate precedentemente. Pertanto si può studiare il segno dei fattori di un polinomio scomposto e poi del prodotto, senza disegnare il grafico dei singoli fattori. Vengono presi in considerazione anche esponenti superiori al 2, che vanno trattati con i seguenti criteri:

1. I binomi nella forma $x^n + a$ con n pari sono sempre positivi, alla stregua di $x^2 + a$
2. I binomi nella forma $x^n + a$ con n dispari non verranno trattati
3. Nelle forme $(x \pm a)^n$ o x^n con n pari vanno trattati alla stregua di $(x \pm a)^2$
4. Nelle forme $(x \pm a)^n$ o x^n con n dispari vanno trattati alla stregua di $(x \pm a)$

In pratica gli esponenti pari vanno trattati come un 2, quelli dispari si ignorano.

Ecco due esempi:

$$y = x^3(x+2)^3(x-3)^4(x+3)$$



$$y = -3(x+1)3(x-1)^4(x+3)^2$$