

# Radici (o zeri) di un polinomio

Dato un polinomio  $P(x)$  le sue radici (o zeri) sono le soluzioni dell'equazione  $P(x) = 0$ .

Per quanto riguarda i polinomi, da questo punto in poi si darà per scontato che il coefficiente direttore (quello associato al monomio di grado più alto), il che equivale a dire che, se il polinomio è ordinato in maniera decrescente rispetto al grado, non inizia con un segno negativo. In particolare, un binomio di primo grado avrà la forma  $ax \pm b$  per qualche  $a$  e  $b$ . Ecco l'equazione da risolvere per trovare la radice, e il suo svolgimento ( $a$  e  $b$  sono trattati come due numeri)

$$ax \pm b = 0 \rightarrow ax = \mp b \rightarrow x = \mp b/a$$

Pertanto un binomio di primo grado ha come unica radice il termine noto cambiato di segno e diviso per il coefficiente direttore (semanca, esso vale 1, quindi la radice diventa intera). Un altro caso che verrà preso in considerazione è quello dei binomi di secondo grado con anche il termine noto positivo, ovvero nella forma  $ax^2 + b$ : trovare la radice equivale a risolvere questa equazione

$$ax^2 + b = 0 \rightarrow ax^2 = -b \rightarrow x^2 = -b/a$$

che non ha soluzioni in quando  $-b/a$  è negativo e un quadrato non può esserlo. Per quanto riguarda i monomi (conenenti un'incognita), quelli nella forma  $ax^n$  essi hanno come una soluzione 0, indipendentemente dal coefficiente. Infine le costanti (prive di parti letterale) diverse da 0 non hanno soluzione, proprio perché tale costante non è uguale a 0. Riassumendo i casi visti (le celle vuote indicano assenza di radice)

| Polinomio | $ax + b$ | $ax - b$ | $ax^2 + b$ | $ax^n$ | $a$ |
|-----------|----------|----------|------------|--------|-----|
| Radice    | $-b/a$   | $b/a$    |            | 0      |     |

Ed ecco alcuni esempi

| Polinomio | $x + 1$ | $x - 2$ | $2x + 5$ | $4x - 3$ | $2x^2 + 3$ | $x^2$ | $3x$ | 4 |
|-----------|---------|---------|----------|----------|------------|-------|------|---|
| Radice    | -1      | 2       | -5/2     | 3/4      |            | 0     | 0    |   |

## Radici dei polinomi scomposti

Se un binomio viene elevato a potenza, nella cambia (infatti una potenza vale 0 solo se la base è 0). La cosa era già stata vista per i monomi, dove  $x^n$  avevano radice 0 esattamente come  $x$ .

| Polinomio | $(x + 1)^2$ | $(x - 2)^3$ | $(2x + 5)^2$ | $(4x - 3)^3$ | $(2x^2 + 3)^4$ |
|-----------|-------------|-------------|--------------|--------------|----------------|
| Radice    | -1          | 2           | -5/2         | 3/4          |                |

Va sottolineata la differenza tra un binomio di secondo grado e uno di primo grado elevato al quadrato: il primo non ha radici, il secondo ne ha come se non fosse elevato a potenza. Ad esempio, c'è differenza tra  $x^2 + 1$ , che non ha radice, e  $(x + 1)^2$ , che ha radice -1. Secondo la legge di annullamento del prodotto, un prodotto vale zero se uno dei suoi fattori vale 0: dunque un valore è una radice di un prodotto se è radice di uno dei fattori. Per questo motivo le radici di un polinomio scomposto, sono le radici dei singoli fattori (escludendo, in quanto prividi radice, costanti moltiplicative e binomi di secondo grado). Per chiarezza ognuna delle radici viene preceduta dalla scrittura  $x =$ .

|                                    |                        |                        |
|------------------------------------|------------------------|------------------------|
| $x^3(3x - 2)^2(x + 1)$             | $x^3(3x - 2)^2(x + 1)$ | $x^3(3x - 2)^2(x + 1)$ |
| $x = 0 \quad x = 2/3 \quad x = -1$ | $x = -5/2 \quad x = 4$ | $x = 0 \quad x = -3$   |

# Zeri e condizioni di esistenza nelle funzioni razionali

Nelle funzioni razionali, formate da un rapporto tra due polinomi, non ha senso parlare semplicemente di radici, ma bisogna specificare se sono radici del numeratore o del denominatore. Dato che una frazione con numeratore 0 vale 0, gli zeri di una funzione razionale sono le radici del numeratore. Se invece il denominatore è 0, il suo valore non è definito: questo si traduce nel fatto che una funzione esiste per tutti i valori eccetto le radici del denominatore. Le condizioni di esistenza (CdE) escludono tali valori, e si scrivono nella forma  $x \neq \dots$ . Ecco alcuni esempi: da notare come l'eventuale segno negativo davanti alla frazione non ha alcuna importanza

$$\frac{5(4x-3)^5(x-1)}{2(2x-3)(x+1)}$$
$$\text{Zeri: } x = \frac{3}{4} \quad x = 1$$
$$\text{CdE: } x \neq -\frac{3}{2} \quad x \neq -1$$

$$\frac{3x(2x+1)}{(5x+4)(x-1)^5(x^2+2)^2}$$
$$\text{Zeri: } x = 0 \quad x = -\frac{1}{2}$$
$$\text{CdE: } x \neq \frac{4}{5} \quad x \neq 1$$

Dato che la divisione per zero non è ammessa nemmeno se il numeratore è zero, in caso di radice comune a numeratore e denominatore, essa determina una CdE ma non uno zero. Quindi, riassumendo

- Gli zeri sono le radici del numeratore, purché non siano anche radici del denominatore
- Le CdE sono le radici del denominatore, anche se sono radici del numeratore.

Ecco un esempio:

$$\frac{5(x+1)^2(2x-1)^2}{x(2x^2+3)(2x-1)(2x+1)} = 0$$
$$\text{Zeri: } x = -1$$
$$\text{CdE: } x \neq \frac{1}{2} \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

La comune radice 1 non fa parte degli zeri, in quanto esclusa dalle CdE.

## Molteplicità delle radici

Si era visto precedentemente che elevare a potenza un monomio o binomio non cambia nulla a livello di radici. Tale esponente è la *molteplicità* della radice ad esso associata: l'assenza di esponente equivale ad un esponente 1. A questo scopo, dato un polinomio scomposto, si può fare lo schema delle radici, ossia scrivere i suoi fattori associando a ciascuno di essi la radice (indicata nella tabella con  $R$ ) e la sua molteplicità ( $M$ ). Ecco due polinomi scomposti con i rispettivi schemi delle radici: da notare come, ancora una volta, le costanti e i binomi di secondo grado, privi di radice, vengono trascurati.

|                          |     |   |  |
|--------------------------|-----|---|--|
| $4x(3x-1)^2(x+2)^3(x-2)$ |     |   |  |
|                          | R   | M |  |
| $4x$                     | 0   | 1 |  |
| $(3x-1)^2$               | 1/3 | 2 |  |
| $(x+2)^3$                | -2  | 3 |  |
| $(x-2)$                  | 2   | 1 |  |

|                        |      |   |  |
|------------------------|------|---|--|
| $3x^2(2x^2+1)(2x+1)^2$ |      |   |  |
|                        | R    | M |  |
| $3x^2$                 | 0    | 2 |  |
| $(2x+1)^2$             | -1/2 | 2 |  |

Per quanto riguarda le funzioni razionali scomposte, l'unica differenza sta nell'aggiungere una colonna che dice se ognuna delle radici proviene dal numeratore o dal denominatore. Ecco due esempi:

|                                         |   |     |   |  |
|-----------------------------------------|---|-----|---|--|
| $\frac{x(4x-3)^5(x-1)}{2(2x-3)(x+1)^2}$ |   |     |   |  |
|                                         |   | R   | M |  |
| $x$                                     | N | 1   | 0 |  |
| $(4x-3)^5$                              | N | 3/4 | 5 |  |
| $(x-1)$                                 | N | 1   | 1 |  |
| $(2x-3)$                                | D | 3/2 | 1 |  |
| $(x+1)^2$                               | D | -1  | 2 |  |

|                                                   |   |      |   |  |
|---------------------------------------------------|---|------|---|--|
| $\frac{5(x+1)^2(2x-1)^2}{x^2(2x^2+3)(x-1)(2x+1)}$ |   |      |   |  |
|                                                   |   | R    | M |  |
| $(x+1)^2$                                         | N | -1   | 2 |  |
| $(2x-1)^2$                                        | N | 1/2  | 2 |  |
| $x^2$                                             | D | 0    | 2 |  |
| $(x-1)$                                           | D | 1    | 1 |  |
| $(2x+1)$                                          | D | -1/2 | 1 |  |