Presentazione

In questa UdA verranno trattati i monomi e i polinomi, con le varie operazioni: verranno considerati soltanto quelli con una sola variabile, che sarà sempre la x. Nulla cambierebbe se si usasse una variabile diversa, mentre sarebbe (sebbene solo in parte) diverso se entrassero in gioco più variabili diverse.

Monomi monici: prodotto e potenza

Un monomio monico è una variabile letterale x elevata a potenza: tale esponente viene definito come il *grado* del monomio. Ecco alcuni monomi

$$x^2 \qquad x^3 \qquad x^4$$

Si era visto nella presende che elevare ad esponente 1 lascia inalterata la base, mentre elevare ad espopnente 0 dà come risultato 1: pertanto è inutile mettere l'esponente 1, mentre un monomio monico di grado 0 equivale al valore 1.

$$x^1 = x \qquad x^3 \qquad x^0$$

Dalle proprietà delle potenze risulta che il prodotto di potenze con uguale base dà come risultato una potenza della stessa base avente come esponente la somma degli esponenti: pertanto il prodotto di due (o più) monomi monici (come premesso, la base è sempre x) è un monomio monico avente come grado la somma dei gradi:

$$x^2 \cdot x^3 = x^5 \qquad x \cdot x^6 = x^7 \qquad x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^6$$

Sempre dalle proprietà delle potenze risulta che la potenza di una potenza è una potenza avente come esponente il prodotto dei due esponenti: pertanto la potenza di un monomio monico è un monomio monico il cui grado viene moltiplicato per l'esponente a cui quello originale viene elevato. Da notare che elevare a potenza un monomio monico di grado 1 significa semplicemente "portare dentro" l'esponente.

$$(x^2)^3 = x^6 \qquad (x^4)^2 = x^8 \qquad (x)^3 = x^3$$

Ora alcuni esempi di prodotto e potenze combinati

$$(x^2 \cdot x)^2 = (x^3)^2 = x^6 \qquad x^4 \cdot (x^3)^2 = x^4 \cdot x^6 = x^{10}$$

Monomi: prodotto e potenza

Un monomio è il prodotto di un numero, anche frazionario, detto *coefficiente* e di un monomio monico, detto *parte letterale*: da notare, che l'esponente, pur essendo numerico, appartiene alla parte letterale. Il segno di moltiplicazione viene sottointeso, pertanto la parte letterale si scrive subito dopo il coefficiente. Ecco alcuni esempi:

$$2x^3 \qquad -3x^2 \qquad 4x \qquad \frac{1}{3}x^4 \qquad -\frac{3}{2}x$$

Il coefficiente può anche essere Come si era già visto quando in UdA3-4 si erano trattati i monomi di primo grado, il coefficiente 1 può essere omesso, mentre se il coefficiente è -1 basta mettere il segno negativo. Se il coefficiente è 0 il risultato è 0, quindi è inutile scrivere la parte letterale.

$$1x^2 = x^2 \qquad -1x^5 = -x^5 \qquad 0x^8 = 0$$

Come già detto, un monomio monico di grado 0 vale sempre 1: moltiplicando il coefficiente per esso, il risultato è il coefficiente stesso: pertanto un numero può essere visto come un monomio di grado 0

$$3x^0 = 3 \qquad -x^0 = -1 \qquad -2x^0 = -2 \qquad \frac{3}{4}x^0 = \frac{3}{4}$$

Il prodotto di due (o più monomi) si ottiene moltiplicando i coefficienti e moltiplicando le parti letterali: in pratica i coefficienti vengono moltiplicati, i gradi vengono sommati. Ecco alcuni esempi: come al solito, non si mettono mai due segni vicino, pertanto se un coefficiente che non sia il primo è negativo, appare tra parentesi.

$$2x \cdot 3x^2 = 6x^3 \qquad -2x^2 \cdot 3x^3 = -6x^5 \qquad -4x \cdot (-3x) = 12x^2 \qquad 5x \cdot (-2x^2) \cdot (2x^3) = -20x^6 \qquad \frac{5}{4}x^4 \cdot \left(-\frac{6}{25}x^3\right) = -\frac{3}{10}x^7$$

Se ci sono monomi senza parte letterale, si moltiplicano quelle che si sono (aggiungere 0 al grado non cambia nulla), lo stesso se mancano dei coefficienti (nulla cambia moltiplicare per 1).

$$x^3 \cdot (-2) = -2x^3 \qquad 2x^2 \cdot 3 = 6x^2 \qquad 5 \cdot (-3x) = -15x \qquad -2 \cdot (-3x^3) \cdot (-x) = -6x^4 \qquad \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}x\right) = -x$$

Anche nelle potenze, l'operazione avviene separatamente sul coefficiente e sulla parte letterale: in pratica si eleva a potenza il coefficiente e si moltiplica la parte letterale:

$$(3x^3)^2 = 9x^6 \qquad (-2x^2)^3 = -8x^6 \qquad (-3x)^2 = 9x^2 \qquad (-x^3)^4 = x^{12} \qquad \left(-\frac{3}{4}x\right)^2 = \frac{9}{16}x \qquad \left(-\frac{2}{3}x^2\right)^3 = -\frac{8}{27}x^6$$

Ecco alcuni esempi di prodotti e potenze combinati:

$$(-2x^3{\cdot}3x^2)^2 = (-6x^5)^2 = 36x^{10} \qquad -4{\cdot}\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2 = -4{\cdot}\left(\frac{1}{4}x^6\right) = -x^6 \qquad 3{\cdot}(-x^2{\cdot}2x)^3 = 3{\cdot}(-2x^3)^3 = 3{\cdot}(-8x^9) = -24x^9$$

Somma di monomi simili

Due (o più) monomi si dicono *simili* se hanno la stessa parte letterale. Questo è l'unico caso in cui possono essere sommati (o sottratti): si sommano i coefficienti lasciando invariata la (comune) parte letterale.

$$5x - 4x + 2x = 3x \qquad -x^2 + 4x^2 - 2x^2 = x^2 \qquad 5x^3 - 2x^3 - 3x^3 = 0$$

Polinomi e loro semplificazione

La somma di monomi non è un'operazione interna, in quanto la somma di monomi è un monomio solo quando sono simili. In caso contrario il risultato è un polinomio, ossia una somma algebrica di monomi. Uno di questi può anche essere senza parte letterale, e viene chiamato *termine noto*

$$3x^2 - 4x^3 + 1 \qquad -2x - 2 + 3x^2 \qquad 4x - x^3 + x^2$$

Come nelle somme algebriche numeriche, im monomi possono essere anche scritti in ordine diverso: in tal senso, un'operazione molto utile è quelli di ordinarli in maniera decrescente rispetto al grado: da notare che l'eventuale termine noto, avendo grado zero, è l'ultimo. Ecco come diventano i tre polinomi precedenti

$$-4x^3 + 3x^2 + 1 \qquad 3x^2 - 2x - 2 \qquad -x^3 + x^2 + 4x$$

Nulla vieta che ci siano dei monomi simili. In tal caso il polinomio può essere semplificato, sommando i monomi simili in maniera tale che risulti un polinomio avente tutti i monomi di grado diverso: si consiglia fortemente di scrivere il polinomio semplificato in modo che sia ordinato. In questo esempio gli elementi da sommari vengono evidenziati tramite colori

$$-3x-3+2x+x^2+5x-4 = x^2+4x-7$$

Ecco altri esempi:

$$2x^2-x+5-x-3x^3-3x^2-x-4 = -3x^3+2x^2-3x^2-x-x-x+5-4 = -3x^3-x^2-3x+1 \qquad x^2+x^4-2x^2+3x^4 = 4x^4-x^2$$

Se un gruppo di monomi simili ha come somma 0, esso non viene scritto (come per x^2 nel primo dei due esempi sottostanti e per il termine noto nel secondo). Se questo succede con tutti, il risultato è 0.

$$x + 3x^2 - 5x - 7x^2 + 5 - 3x^3 + 4x^2 = -3x^3 - 4x + 5 \qquad 2 - x^2 + 2x^2 - 2 = -x^2 \qquad 6x^2 - 3x^3 - 3x^2 + 3x^3 + 3x^2 = 0$$

Prodotto di un monomio per un polinomio

Il prodotto di un monomio per un polinomio si ottiene moltiplicando il monomio per ognuno dei monomi che formano il polinomio. Da notare che se il polinomio da moltiplicare è ordinato, anche il polinomio risultante lo è (come nei primi due casi).

$$3x^2(-x^3 + 2x^2 - 2) = -3x^5 + 6x^4 - 6x^2 \qquad -2(4x^3 - x) = -8x^3 + 2x \qquad x(4 - x^2 + x) = 4x - x^3 + x^2$$

Un caso particolare è quello il polinomio si compone soltanto di un segno negativo: questo equivale a moltiplicare per -1, ossia a cambiare segno a TUTTI (errore molto diffuso è quello di cambiare il segno soltanto al primo) i monomi

$$-(5x^2 - 7x + 3) = 5x^2 + 7x - 3 \qquad -(-x^3 + 3x^2 - 2) = x^3 - 3x^2 + 2 \qquad -(4 - x) = -4 + x$$

Quando il monomio ha coefficiente negativo, si può svolgere anche i due passaggi: trascrivere il segno negativo e, tra parentesi, svolgere il prodotto come se non ci fosse tale segno, e poi cambiare tutti i segni. Ecco come si svolge in questa maniera il secondo esempio dei tre mostrati all'inizio del paragrafo

$$-2(4x^3 - x) = -(8x^3 - 2x) = -8x^3 - 2x$$

Ovviamente è stato ottenuto lo stesso risultato: si vedrà in seguito che in alcuni casi questo metodo (che comporta un passaggio in più) risulta migliore.
Da notare anche che se il polinomio di partenza non contiene monomi simili, non ne contiene nemmeno il prodotto: pertanto non c'è alcun bisogno di semplificarlo (conviene nel caso semplificare il polinomio di partenza).

Prodotto di polinomi

Il prodotto di due polinomi, è la somma di tutti i monomi ottenuti moltiplicando un monomio del primo polinomio per uno del secondo. Non ha l'importanza l'ordine: nel seguente esempio il risultato viene scritto in due modi diversi, ma del tutto equivalenti.

$(2x^3-1)(x^2-3x-2) = ...$

	x^2	$-3x$	-2
$2x^3$	$2x^5$	$-6x^4$	$-4x^3$
-1	$-x^2$	$+3x$	$+2$

$....... = 2x^5 - 6x^4 - 4x^3 - x^2 + 3x + 2$

$....... = 2x^5 - 4x^3 + 3x - 6x^4 - x^2 + 2$

Potrebbe essere necessario semplificare il polinomio ottenuto, come in questi due esempi:

$$(3x-2)(-x+3) = -3x^2 + 9x + 2x - 6 = -3x^2 + 11x - 6$$

$$(3x^2-5x-3)(3x+2) = 9x^3 - 15x^2 - 9x + 6x^2 - 10x - 6 = 9x^3 - 9x^2 - 19x - 6$$

$$(-x^2+x+2)(2x^2-3x+1) = -2x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x^3 - 3x^2 + x + 4x^2 - 6x + 2 = -2x^4 + 5x^3 - 5x + 2$$

Espressioni

Un'espressione letterale è, nella sua forma più semplice, una somma di monomi, polinomi e operazioni tra di essi. La loro risoluzione consiste in tre passaggi:

1. Risoluzione dei prodotti: i prodotti di polinomi vanno lasciati tra parentesi e non serve semplificarli (meglio rinviare l'operazione alla fine)
2. Eliminazione delle parentesi (si cambia il segno quando la parentesi è preceduta da segno negativo)
3. Semplificazione

Ecco alcuni esempi:

$$-4x-(x+2)(3x-2)-5x(x^2+1) = -4x-(3x^2-2x+6x-4)-5x^3-5x = -4x-3x^2+2x-6x+4-5x^3-5x = -5x^3-3x^2-13x+4$$

$$3(-x^2+2)-(x+2)(x-1)+(4x^2+x-8) = -3x^2+6-(x^2-x+2x-2)+(4x^2+x-8) = -3x^2+6-x^2+x-2x+2+4x^2+x-8 = 0$$

Equazioni di primo grado

I membri di un'equazioni possono essere delle espressioni come quelle appena viste. Per risolvere l'equazione bisogna prima risolvere le espressioni. Poi si spostano a sinistra i monomi in x, a destra i termini noti, cambiando il segno a ciò che viene spostato. I monomi di grado superiore al primo devono annullarsi, altrimenti l'equazione non è di primo grado. A questo punto l'equazione si risolve normalmente. Ecco un esempio:

$$-(3x^2+x)(-2x+4) + 13x - 6x^2(x-4) = 10x^2 + (4x+3)(x+3)$$

$$-(-6x^3 + 12x^2 - 2x^2 + 4x) + 13x - 6x^3 + 24x^2 = 10x^2 + (4x^2 + 12x + 3x + 9)$$

$$6x^3 - 12x^2 + 2x^2 - 4x + 13x - 6x^3 + 24x^2 = 10x^2 + 4x^2 + 12x + 3x + 9$$

$$6x^3 - 12x^2 + 2x^2 - 4x + 13x - 6x^3 + 24x^2 - 10x^2 - 4x^2 - 12x - 3x = 9$$

$$-6x = 9 \;\rightarrow\; 6x = -9 \;\rightarrow\; x = -3/2$$