POTENZE

La potenza è un'operazione scritta nella forma a^n dove l'elemento a si chiama *base* e l'elemento n si chiama *esponente* . Il risultato è il prodtto della base moltiplicata per sé stessa tante volte quante l'esponente.

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \qquad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \qquad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

Da notare l'ultimo esempio: se la base è 10, il risultato è un numero la cui prima cifra è 1, seguito da tanti zei quanti l'esponente (ad esempio $10^4 = 10000$).

CASI PARTICOLARI

Se la base è 0 o 1, il risultato rimane 0 o 1, qualunque sia l'esponente (tale il risultato se si moltiplica 0 o 1 per sé stesso un qualunque numero di volte). Se l'esponente è 0, il risultato è sempre 1; se l'esponente è 1, il risultato corrisponde alla base. In sintesi:

$$0^n = 0 \qquad 1^n = 1 \qquad a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

ESPRESSIONI CON LE POTENZE

Le potenze sono le prime operazioni da risolvere. Seguono le moltiplicazioni e le divisioni (da sinistra a destra), infine le addizioni e le sottrazioni.

$$5 - 16 : 2^3 + 4 \cdot 3 - 3^2 = 5 - 16 : 8 + 4 \cdot 3 - 9 = 5 - 2 + 12 - 9 = 6$$

In presenza di parentesi, si risolvono prima le espressioni all'interno di essa:

$$5 - (-3 + 2^3) \cdot (6 - 2 \cdot 4) - (-5 + 4^2 : 2) + (6 - 4)^3 = 5 - (-3 + 8) \cdot (6 - 2 \cdot 4) - (-5 + 16 : 2) + (6 - 4)^3 =$$

$$= 5 - (-3 + 8) \cdot (6 - 8) - (-5 + 8) + (6 - 4)^3 = 5 - (-3 + 8) \cdot (-2) - (-5 + 8) - 2^3 = 5 - (-5) \cdot (-2) - 3 + 2^3 = 5 - 10 - 3 + 8 = 0$$

PROPRIETÁ DELLE POTENZE

Ci sono alcune proprietà che permettono di trasformare le potenze, rendendo in certi casi più agevole il calcolo. Vengono qui elencate, scrivendo poi la proprietà in simboli e alcuni esempi

1. Il prodotto di potenze di uguale base è una potenza di uguale base avente come esponente la somma degli esponenti:

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p} \qquad 3^5 \cdot 3^2 = 3^7 \qquad 2^6 \cdot 2^2 = 2^8$$

2. La divisione di potenze di uguale base è una potenza di uguale base avente come esponente la differenza degli esponenti:

$$a^n : a^p = a^{n-p} \qquad 3^5 : 3^2 = 3^3 \qquad 2^6 : 2^2 = 2^4$$

3. La potenza di una potenza è una potenza di uguale base avente come esponente il prodotto degli esponenti:

$$(a^n)^p = a^{np} \qquad (3^5)^2 = 3^{10} \qquad (2^3)^3 = 2^9$$

4. Il prodotto di potenze di uguale esponente è una potenza di uguale esponente avente come base il prodotto delle basi:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad 2^3 \cdot 4^3 = 8^3 \qquad 3^2 \cdot 5^2 = 15^2$$

5. La divisione di potenze di uguale esponente è una potenza di uguale esponente avente come base la divisione delle basi:

$$a^n : b^n = (a : b)^n \qquad 8^3 : 4^3 = 2^3 \qquad 15^2 : 5^2 = 3^2$$

Va notato che le prime due proprietà possono essere utilizzate anche se manca un esponente, ricordando che è come se l'esponente fosse 1.

$$a^n \cdot a = a^{n+1} \qquad 3^5 \cdot 3 = 3^6 \qquad 2 \cdot 2^7 = 2^8$$

$$a^n : a = a^{n-1} \qquad 3^5 : 3 = 3^4 \qquad 2^7 : 2 = 2^6$$

Ecco delle espressioni risolvibili tramite queste proprietà: il risultato viene calcolato solo alla fine. Non è obbligatorio utilizzarle, ma i passaggi intermedi avrebbero coinvolto numeri molto grandi, pertanto queste proprietà possono semplificare molto i calcoli.

$$(6^2)^4 : (2^7 \cdot 3^7) = 6^8 : 6^7 = 6 \qquad (12^3 : 3^3) : (2^2 \cdot 2) = 4^3 : 2^3 = 2^3 = 8$$

Ecco ora un'espressione più complessa dove in molti casi (ma non sempre) possono essere utilizzate queste proprietà:

$$2 \cdot (3^5 : 3^3 - 2^2) - (4^2 : 2^3)^3 \cdot (3^2 - 7)^7 : (2^3)^3 = 2 \cdot (3^2 - 2^2) - (16 : 8)^3 \cdot (9 - 7)^7 : (2^3)^3 =$$

$$= 2 \cdot (9 - 4) - 2^3 \cdot 2^7 : 2^9 = 2 \cdot 5 - 2^3 \cdot 2^7 : 2^9 = 10 - 2^{10} : 2^9 = 10 - 2 = 8$$

POTENZE DI FRAZIONI

La potenza di una frazione si indica mettendo la frazione tra parentesi: il risultato si ottiene elevando a potenza numeratore e denominatore.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Nelle espressioni che seguono, le operazioni con le frazioni vengono risolte direttamente, senza i passaggi relativi al denominatore comune (per addizioni e sottrazioni) e alla semplificazione in diagonale (per le moltiplicazioni):

$$2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 - 6 \cdot \frac{1}{8} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Ecco ora un'espressione più complessa:

$$\left(2 - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{5}\right)^2 - \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} =$$

$$= \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{5} == \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{5} == \frac{9}{16} \cdot \frac{16}{25} - \frac{8}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{5} = \frac{9}{25} - \frac{8}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{5} = 1$$

POTENZE DI NUMERI NEGATIVI

Se la base è negativa, essa va scritta tra parentesi. Pertanto le seguenti espressioni non sono petenze di numeri negativi, ma soltanto potenze di numeri assoluti con davanti un segno negativo: in tal caso la potenza si svolge come prima operazione, mettendo poi davanti il segno negativo.

$$-5^2 = -25 \qquad -\,2^4 = -16 \qquad -\,1^8 = -1 \qquad -\,3^3 = -27$$

Siccome le potenze sono moltiplicazioni ripetute tante volte quante l'esponente, se la base è negativa, essa è una moltiplicazione contenente tanti segni negativi quanti l'esponente: e, ricordando la regola dei segni, segue che tale segno scompare se l'esponente è pari. Ecco alcuni esempi, con gli stessi numeri usati precedentemente:

$$(-5)^2 = 25 \qquad (-2)^4 = 16 \qquad (-1)^8 = 1 \qquad (-3)^3 = -27$$

Si era detto nella UdA relativa alle espressioni con le quattro operazioni, nello specifico con i numeri negativi, che se il risultato all'interno di una parentesi è negativo, va lasciato tra parentesi e poi si contano i segni negativi dopo ogni segno tra parentesi. Ecco un esempio di quest'ultimo tipo:

$$-5 \cdot (-2) + 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 \cdot (-1) = \qquad -5 \cdot (-2) \quad +3 \cdot (-4) \quad -2 \cdot 3 \cdot (-1) \qquad = 10 - 12 + 6 = 4$$

Nella parte centrale, l'espressione è stata riscritta divisa in parti tali che ognuna di esse inizi con un segno: la quantità di segni negativi presenti in ogni settore determina il segno del prodotto.
In presenza di potenze si procede nello stesso modo, risolvendo la potenza prima delle moltiplicazioni: se una base negativa viene elevata ad esponente pari, oltre ad eliminare il segno negativo, si eliminano anche le parentesi:

$$3 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot 3^2 \cdot (-1)^4 = 3 \cdot (-8) + 3 \cdot 16 - 2 \cdot 9 \cdot 1 = \qquad 3 \cdot (-8) \quad +3 \cdot 16 \quad -2 \cdot 9 \cdot 1 \qquad = -24 + 48 - 18 = 6$$

Ecco ora un'espressione più complessa (si omette la visualizzazione "staccata" dei prodotti da sommare):

$$-(3^2 - 2^4 + 2^2 + 1)^2 \cdot (1 - 2^2)^1 + 2 \cdot (-2^3) = -(9 - 16 + 4 + 1)^2 \cdot (1 - 4)^1 + 2 \cdot (-2^3) = -(-2)^2 \cdot (-3)^1 + 2 \cdot (-8) = -4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-8) = 12 - 16 = -4$$