# Equazioni e soluzioni

Un'equazione in $x$ è un'uguaglianza fra due espressioni (chiamate membri) contenenti una variabile letterale (generalmente la $x$). In questa UdA verranno considerate soltanto equazioni i cui membri sono polinomi di primo grado Un numero (non necessariamente intero) è una soluzione di dell'equazione se sostituito ad $x$ rende uguali le due espressioni. In pratica, in un'equazione nella forma $P(x) = Q(x)$ un valore $a$ è una soluzione se $P(a) = Q(a)$.

Ad esempio, nell'equazione:

$$3x + 7 = -2x - 3$$

IL valore $-2$ è una soluzione, dato che, valutando i due polinomi per tale valore, si ottiene in entrambi i casi 1, come mostrato qui sotto.

$$3 \cdot (-2) + 7 = -6 + 7 = 1 \qquad -2 \cdot (-2) - 3 = 4 - 3 = 1$$

Non lo è invece il valore 2, dato che si ottengono risultati diversi.

$$3 \cdot 2 + 7 = 6 + 7 = 13 \qquad -2 \cdot 2 - 3 = -4 - 3 = -7$$

Un'equazione si dice impossibile se non ha soluzioni. Un'equazione si dice indeterminata se qualunque valore è una soluzione. In qualunque altro caso l'equazione si dice determinata.
Due equazioni si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.
Un'equazione è di primo grado se entrambi i membri sono polinomi di primo grado. Ad esempio (notare che i polinomi possono anche essere incompleti):

$$3x - 2 = x + 1 \qquad -4x = -2x + 5 \qquad 7x - 6 = 2$$

Un'equazione di primo grado è in forma elementare se il membro a sinistra è un monomio di primo grado, quello a destra è un numero, cioè è nella forma $ax = b$, dove $a$ e $b$ sono due numeri (se $a = 1$ non serve scriverlo, se $a = -1$ basta scrivere il segno negativo) . Ad esempio:

$$3x = 5 \qquad -5x = 1 \qquad 4x = 0 \qquad -x = 2$$

Ora verrà mostrato come trovare la soluzione (uncia, se l'equazione è determinata), mostrando prima come un'equazione può essere ridotta in forma elementare, poi mostrando come si risolve questo tipo di equazione.

# Primo principio di equivalenza

Aggiungendo o togliendo un qualsiasi monomio ad entrambi i membri si ottiene un'equazione equivalente.
Da questo discende un'importante proprietà: un monomio può essere spostato da un membro all'altro, purché venga cambiato il segno. Ad esempio (mai mettere il segno di uguaglianza per indicare due equazioni equivalenti, si mette una freccia oppure si passa alla riga successiva)

$$-3x^2 - 5x + 2 = x^3 + 4x - 7 \longrightarrow -x^3 - 5x + 7 = 3x^2 + 4x - 2$$

Come si vede, alcuni monomi sono passati da una parte all'altra cambiando il segno, altri sono rimasti invariati al loro posto.

# Riduzione ad elementare di un'equazione di primo gardo

Il primo principio di equivalenza permette di trasformare in elementare un'equazione di primo grado: basta spostare a sinistra i monomi con la x e a destra quelli senza, e poi svolgere le somme. Ecco tre esempi citati precedentemente:

$$3x-2 = x+1 \to 3x-x = 2+1 \to 2x = 3 \qquad -4x = -2x+5 \to -4x+2x = -5 \to -2x = -5 \qquad 7x-6 = 2 \to 7x = 2+6 \to 7x = 8$$

# Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo per uno stesso numero i due membri si ottiene un'equazione equivalente.
Questo principio ha numerose applicazioni. Ecco alcuni esempi:

- Possono essere cambiati tutti i segni (moltiplicando per $-1$):

$$3x - 2 = -x + 1 \to -3x + 2 = x - 1$$

- Un denominatore comune puó essere eliminato (moltiplicando per quel denominatore):

$$\frac{-x-3}{4} = \frac{-5x}{4} \to -x - 3 = -5x$$

- Risolvere un'equazione elementare (dividendo per il coefficiente di $x$):

$$3x = 5 \to x = \frac{5}{3}$$

# Risoluzione di un'equazione elementare di primo grado

Applicando il secondo principio di equivalenza (in particolare seguendo l'ultima applicazione mostrata) si ha che la soluzione di un'equazione nella forma $ax = b$ è $x = \frac{b}{a}$ (frazione che va eventualmente semplificata). In pratica il coefficiente si muove "diagonalmente", visto che passa da sinistra in alto a destra in basso. Pur potendo applicare questo principio anche se $a$ è negativa, si consiglia in questo caso di cambiare entrambi i segni (altra applicazione del secondo principio) in modo da avere il segno già pronto. Ecco alcuni esempi:

$$3x = 6 \to x = \frac{6}{3} = 2 \qquad 6x = -9 \to x = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} \qquad -4x = 2 \to 4x = -2 \to x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad -7x = -3 \to 7x = 3 \to x = \frac{3}{7}$$

Dato che $0x = 0$ si ha che, se $a = 0$, il membro a sinistra vale 0 a prescindere dal valore di $a$, pertanto l'equazione é sempre vera (dunque indeterminata) se $b = 0$, sempre falsa (dunque impossibile) altrimenti. Inoltre, se $b = 0$, allora (se $a \neq 0$) si ha $x = 0/a = 0$, pertanto la soluzione in questo caso è 0. Riassumendo:

| $a = 0 \quad b = 0$ | $a = 0 \quad b \neq 0$ | $a \neq 0 \quad b = 0$ |
|---|---|---|
| Indeterminata | Impossibile | $x = 0$ |

# Risoluzione di un'equazione di primo grado a coefficienti interi

Un'equazione di primo grado a coefficienti interi va prima ridotta ad elementare e poi risolta come tale. Entrambi i passaggi sono già stati spiegati in appositi paragrafi. In pratica bisogna:

- Spostare a sinistra i monomi contenenti $x$ e a destra gli altri (primo principio di equivalenza)
- Svolgere le somme
- Cambiare entrambi i segni se il coefficiente di $x$ è negativo (rendendolo in tal modo positivo)
- Dividere per il coefficiente (sicuramente non negativo a questo punto) di $x$ oppure dichiarare l'equazione impossibile o indeterminata se tale coefficiente è zero.

Ecco degli esempi in cui vengono visualizzati i passaggi (da notare che non necessariamente servono tutti, motivo per cui alcune celle sono vuote)

| $2x - 1 = -x + 3$ | $3x + 3 = x - 3$ | $-5x - 2 = 3x + 2$ | $x + 2 = 2x$ | $3x - 2 = -2$ | $x + 2 = x - 1$ | $2x - 3 = 2x - 3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x + x = 1 + 3$ | $3x - x = -3 - 3$ | $-5x - 3x = 2 + 2$ | $x - 2x = -2$ | $3x = -2 + 2$ | $x - x = -2 - 1$ | $-2x + 2x = 3 - 3$ |
| $3x = 4$ | $2x = -6$ | $-8x = 4$ | $-x = -2$ | $3x = 0$ | $0 = -3$ | $0 = 0$ |
| | | $8x = -4$ | $x = 2$ | | | |
| $x = \frac{4}{3}$ | $x = -\frac{6}{2} = -3$ | $x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$ | | $x = 0$ | Impossibile | Indeterminata |

# Come eliminare le frazioni nelle equazioni

In presenza di frazioni, bisogna portare tutto allo stesso denominatore. A questo punto, si porta a denominatore comune e poi si trascura (non serve riscrivere l'equazione senza denominatore, si può andare al passo successivo ignorando tale denominatore). Ecco due esempi: dopo aver portato l'equazione a denominatore comune (unico per entrambi i membre dell'equazione), si passa direttamente al "trasporto" dei monomi dalla parte giusta.

$$\frac{1}{6}x - \frac{3}{10} = -\frac{2}{15}x \to \frac{5x - 9}{30} = -\frac{-4x}{30} \to 5x + 4x = 9 \to 9x = 9 \to x = \frac{9}{9} = 1$$

$$-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{5}{6}x + \frac{4}{3} \to \frac{-3x + 6}{6} = \frac{5x + 8}{6} \to -3x - 5x = -6 + 8 \to -8x = 2 \to 8x = -2 \to x = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

# Verifica di un'equazione

Dopo aver risolto un'equazione, se non è impossibile o indeterminata, può essere verificata: ovvero si sostituisce la $x$ con la soluzione trovata e si verifica di ottenere lo stesso risultato.
Questi esempi sono relativi alle equazioni risolte nei paragrafi precedenti, con le rispettive soluzioni:

| **Equazione** | **Soluzione** | **Verifica** |
|---|---|---|
| $2x-1=-x+3$ | $\frac{4}{3}$ | $2\cdot\frac{4}{3}-1=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}$<br>$-\frac{4}{3}+3=\frac{5}{3}$ |
| $3x+3=x-3$ | $-3$ | $3\cdot(-3)+3=-9+3=-6$<br>$-3-3=-6$ |
| $-5x-2=3x+2$ | $-\frac{1}{2}$ | $-5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$<br>$3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$ |
| $x+2=2x$ | $2$ | $2+2=4$<br>$2\cdot 2=4$ |
| $3x-2=-2$ | $0$ | $3\cdot 0-2=0-2=-2$<br>$-2$ |
| $\frac{1}{6}x-\frac{3}{10}=-\frac{2}{15}x$ | $1$ | $\frac{1}{6}\cdot 1-\frac{3}{10}=\frac{1}{6}-\frac{3}{10}=-\frac{4}{30}=-\frac{2}{15}$<br>$-\frac{2}{15}\cdot 1=-\frac{2}{15}$ |
| $-\frac{1}{2}x+1=\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}$<br>$\frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{3}=-\frac{5}{24}+\frac{4}{3}=\frac{27}{24}=\frac{9}{8}$ |
| $2(-2x+3)=-3(3x-1)+3$ | $0$ | $2\cdot(-2\cdot 0+3)=2\cdot(0+3)=2\cdot 3=6$<br>$-3\cdot(3\cdot 0-1)+3=-3\cdot(-1)+3=3+3=6$ |