

LIMITI ALL'INFINITO

Data una funzione f e un valore L (un numero finito oppure anch'esso ∞), la notazione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

significa che per valori molto grandi (positivi o negativi che siano), la funzione assume valori molto vicini a L (che, se $L = \infty$, significa a sua volta “molto grandi”): da notare che, in questo paragrafo, non verrà preso in considerazione il segno dell'infinito.

PRODOTTO E FRAZIONI CON INFINITO

Quando un numero molto grande viene moltiplicato o diviso per uno “normale”, esso rimane molto grande. Altrettanto succede se viene elevato a potenza. Pertanto il limite all'infinito di un monomio è infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -3x = -3\infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} -x^4 = -\infty^4 = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^2 = 5\infty^2 = \infty$$

Quando invece si divide per un numero molto grande (sempre che il numero che viene diviso non sia a sua volta molto grande), si ottiene un numero molto piccolo, pertanto il rapporto di un numero per un monomio tende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{\infty^2} = 0$$

Confrontando con quanto visto per i limiti a valore finito, si ha (per il primo non serve scomodare i limiti) che, se A è un valore diverso da zero:

$$\frac{0}{A} = 0 \quad \frac{A}{0} = \infty \quad \frac{\infty}{A} = \infty \quad \frac{A}{\infty} = 0$$

In pratica, quando lo zero o l'infinito sono al numeratore, rimangono tali, quando sono al denominatore si scambiano

LIMITI ALL'INFINITO IN UN RAPPORTO DI MONOMI

Un rapporto tra due monomi può sempre essere semplificato: in particolare, se i due monomi hanno lo stesso grado, tale rapporto in realtà è una frazione numerica, e quello è il limite. Se invece i monomi hanno gradi diversi, la variabile rimane solo in quello di grado più alto: alla luce di quanto visto prima, se è al numeratore, il limite all'infinito è infinito, se è al denominatore il limite è zero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x} = \frac{2}{3\infty} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{5x^4} = \frac{1}{5} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{4} = \frac{5\infty^2}{4} = \infty$$

Onde evitare di portarsi dietro la scritta $\lim_{x \rightarrow \infty}$ si può scrivere la funzione senza di essa e, al momento di sostituire x con ∞ si scrive, anziché il simbolo di uguaglianza, una freccia verso destra (che significa “tende all'infinito a”. Ecco i tre esempi precedenti usando questa notazione semplificata (nel secondo di essi nulla cambia, visto che non c'è alcun limite da calcolare):

$$\frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x} \rightarrow \frac{2}{3\infty} = 0 \quad \frac{x^4}{5x^4} = \frac{1}{5} \quad \frac{5x^3}{4x} = \frac{5x^2}{4} \rightarrow \frac{5\infty^2}{4} = \infty$$

LIMITI ALL'INFINITO IN UN POLINOMIO

Si noti intanto che il rapporto tra una somma algebrica e un singolo valore è uguale alla somma algebrica dei rapporti tra tali valori e quello singolo: in pratica, dato il valore V e i valori A B C (si fa l'esempio con tre valori, ma possono essere un numero qualunque) si ha:

$$\frac{A+B+C}{V} = \frac{A}{V} + \frac{B}{V} + \frac{C}{V}$$

Questa regola viene applicata (leggendo l'uguaglianza al contrario) per sommare frazioni con lo stesso denominatore, come in questi esempi (nel secondo compaiono anche sottrazioni, ma nulla cambia):

$$\frac{2}{13} + \frac{5}{13} + \frac{3}{13} = \frac{2+5+3}{13} = \frac{10}{13} \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3-1+7}{4} = \frac{9}{4}$$

Si noti ora che, dati due valori U e V , si ha

$$U = V \cdot \frac{U}{V}$$

Se tale U è una somma algebrica (ancora una volta si suppone il semplice caso $A+B+C$) si ha

$$A+B+C = V \cdot \frac{A+B+C}{V} = V \left(\frac{A}{V} + \frac{B}{V} + \frac{C}{V} \right)$$

Inoltre se V è il primo elemento di tale somma algebrica si ha che il primo elemento della nuova somma sia una frazione semplificabile a 1:

$$A+B+C = A \cdot \frac{A+B+C}{A} = A \left(\frac{A}{A} + \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right)$$

Dato un polinomio ordinato P (che è una somma algebrica di monomi in cui il primo è quello di grado più alto), applicando la regola riportata qui sopra e poi semplificando i vari rapporti di monomi, risulta non solo che il primo si semplifica a 1, ma che in tutti gli altri la lettera compare al solo denominatore. Ecco due esempi:

$$2x^3 - 5x + 3 = 2x^3 \left(\frac{2x^3}{2x^3} - \frac{5x}{2x^3} + \frac{3}{2x^3} \right) = 2x^3 \left(1 - \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{2x^3} \right) \quad x^4 - 3x = x^4 \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{3x}{x^4} \right) = x^4 \left(1 - \frac{3}{x^3} \right)$$

Nella sezione relativa ai limiti a valore finito si era mostrato che dividendo per 0 il limite risultava ∞ : analogamente, dividendo per un valore infinito il limite è zero. Dovendo calcolare il limite all'infinito, si ha che il limite del monomio fuori parentesi è infinito, mentre quello tra parentesi è una somma algebrica il cui primo membro vale 1 e tutti gli altri (divisione per infinito) valgono zero: il limite è pertanto infinito. Ecco come si ottiene il limite all'infinito dei due esempi precedenti:

$$2\infty^3 \left(1 - \frac{5}{2\infty^2} + \frac{3}{2\infty^3} \right) = 2\infty(1 - 0 + 0) = \infty \cdot 1 = 1 \quad \infty^4 \left(1 - \frac{3}{\infty^3} \right) = \infty \cdot 1 = 1$$

Ecco ora un esempio completo: si usa la notazione rapida con la freccia al momento della sostituzione:

$$2x^4 - 3x + 5 = 2x^4 \left(\frac{2x^4}{2x^4} - \frac{3x}{2x^4} + \frac{5}{2x^4} \right) = 2x^4 \left(1 - \frac{3}{2x^3} + \frac{5}{2x^4} \right) \longrightarrow 2\infty^4 \left(1 - \frac{3}{2\infty^3} + \frac{5}{2\infty^4} \right) = 2\infty^4(1 - 0 + 0) = \infty \cdot 1 = 1$$

FUNZIONI ASINTOTICHE

Date due funzioni $f(x)$ e $f_1(x)$ si dice che f è asintotica a f_1 se $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f_1(x)} = 1$, ossia se $f(x)$ può essere scritta come $f_1(x) \cdot g(x)$ con $g(x) \rightarrow 1$: in tal caso si usa la notazione $f = g$.

Si è visto precedentemente come un polinomio può essere scritto come il prodotto del suo monomio di grado maggiore moltiplicato per una funzione che tende a 1. Ad esempio:

$$2x^2 + 5x - 4 \approx 2x^2$$

Sul piano pratico, questo significa che per valori di x molto grandi conta di fatto solo il primo monomio, gli altri sono trascurabili. Ad esempio, il precedente monomio, se $x = 1000$ vale 2005004, ma la parte 5004 è trascurabile rispetto a 2000000. Date due funzioni f e g e due funzioni f_1 e g_1 asintotiche ad esse si ha che $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ e $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ con $f_2(x) \rightarrow 1$ e $g_2(x) \rightarrow 1$. In tal caso si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot 11 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Questo vuol dire che il limite all'infinito di un rapporto tra due funzioni si può calcolare sostituendole con due funzioni ad esse asintotiche. In simboli, se $f(x) \approx f_1(x)$ e $g(x) \approx g_1(x)$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

LIMITI ALL'INFINITO DI UNA FUNZIONE RAZIONALE

Dati due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, il limite all'infinito della funzione razionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si calcola sostituendo i due polinomi con i rispettivi monomi di grado più alto (funzioni ad esse asintotiche), riducendosi così a calcolare il limite di un rapporto di monomi. Ecco tre esempi:

$$\frac{x^2 + 5x - 3}{2x + 5} \approx \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \rightarrow \infty \quad \frac{4x^2 + 5x}{6x^2 - x} \approx \frac{4x^2}{6x^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \frac{2x^3 + x}{3x^4 - 2} \approx \frac{2x^3}{3x^4} = \frac{2}{3x} \rightarrow 0$$

In pratica si possono avere tre situazioni

- Se il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore il limite è infinito
- Se il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore il limite è il rapporto tra i due coefficienti direttore (solo in questo caso i coefficienti hanno importanza)
- Se il grado del numeratore è minore di quello del denominatore il limite è zero