

Radici di un polinomio

Le radici di un polinomio sono i valori a tali che $(f(a) = 0$: per questo motivo le radici sono chiamate anche *zeri*. Attraverso la scomposizione, un polinomio (in realtà quelli che vengono qui presi in considerazione, in generale la situazione sarebbe molto più complessa) diventa il prodotto di una costante, un monomio, binomi di primo grado, binomi di grado pari: ognuno di questi può esserci o no, mentre i binomi possono anche essere elevati a potenza. Le radici del polinomio sono le radici dei suoi fattori. Le costanti non vanno prese in considerazione, come pure i binomi di grado pari. Il monomio (qualunque sia il suo grado) ha radice 0, mentre i binomi di primo grado, aventi forma $ax \pm b$, hanno come radice $-b/a$, ossia il termine noto cambiato di segno diviso per il coefficiente direttore (quest'ultimo è sempre positivo). Ecco un esempio:

$$160x^7 - 810x^3 = 10x^3(16x^4 - 81) = 10x^3(16x^4 - 81) = 10x^3(4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = 10x^3(2x + 3)(2x - 3)(4x^2 + 9)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Fattore} \\ \hline 10 \quad x^3 \quad (2x + 3) \quad (2x - 3) \quad (4x^2 + 9) \\ \hline \text{Radice} \\ \hline 0 \quad -3/2 \quad 3/2 \end{array}$$

$$\text{Radici:} \quad x = 0 \quad x = \frac{3}{2} \quad x = -\frac{3}{2}$$

Se i binomi sono elevati a potenza, tale esponente non ha importanza per quanto riguarda le radici (si vedrà presto come ha invece importanza per quanto riguarda la loro molteplicità).

$$12x^2 - 18x - 2x^3 = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -(2x^3 - 12x^2 + 18x) = -2x(x^2 - 6x + 9) = -2x(x - 3)^2$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Fattore} \\ \hline -2 \quad x \quad (x - 3)^2 \\ \hline \text{Radice} \\ \hline 0 \quad 3 \end{array}$$

$$\text{Radici:} \quad x = 0 \quad x = 3$$

CdE e Zeri di una funzione razionale

Scomponendo una funzione razionale si hanno radici del numeratore e radici del denominatore. Le condizioni di esistenza (CdE) di una funzione razionale f , ossia i valori a per i quali $f(a)$ è definito, sono tutti eccetto le radici del denominatore, ognuna delle quali determina la condizione $x \neq \dots$. Gli zeri, ossia i valori a tali che $f(a) = 0$ sono le radici del numeratore. L'eventuale segno negativo davanti alla linea di frazione non ha importanza. Da notare che, se ci sono due radici del numeratore o del denominatore che sono fra di loro opposte (situazione che capita quando si scompone una differenza di quadrati) si può, anziché scriverle separatamente, usare la notazione $\pm$: nel prossimo esempio, gli zeri sono elencati con $x = \pm 2$, il che equivale a scrivere distintamente $x = 2$ e $x = -2$.

$$\frac{-x^4 + 3x^2 + 4}{9x^2 + 6x} = -\frac{x^4 - 3x^2 - 4}{9x^2 + 6x} = -\frac{(x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)}{3x(3x + 2)} \quad \text{CdE:} \quad x \neq 0 \quad x \neq -2/3 \quad \text{Zeri:} \quad x = \pm 2$$

In presenza di radici comuni, le CdE prevalgono sugli zeri: questo significa che le CdE escludono le radici del denominatore, indipendentemente se siano o no anche radici del numeratore, mentre gli zeri includono le radici del numeratore, purché che non siano radici anche del denominatore: in questo esempio, il valore 1, pur essendo radice del numeratore, non fa parte degli zeri in quanto radice anche del denominatore.

$$\frac{1 - x^2}{2x - x^2 - 1} = \frac{-x^2 + 1}{-x^2 + 2x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)^2} \quad \text{CdE:} \quad x \neq 1 \quad \text{Zeri:} \quad x = -1$$

Radici e molteplicità

Da questo momento in poi si escluderanno i casi in cui ci siano radici comuni a numeratore e denominatore.

Si era visto precedentemente che un binomio di primo grado, nella forma $(ax + b)$ ha radice $-b/a$. Nulla cambia, a livello di radice, se tale binomio viene elevato a potenza: ad esempio, il fattore $(x + 1)$ e il fattore $(x + 1)^2$ (quest'ultimo non va confuso con $(x^2 + 1)$, privo di radici) hanno entrambi radice 1. Dall'esponente dipende invece la molteplicità della radice, ricordando che l'esponente vale 1 quando non c'è. Allo stesso modo, il fattore x ha radice 0 con molteplicità 1, il fattore x^n ha radice 0 con molteplicità n . Ecco due esempi: il primo è un polinomio, e ci sono le colonne R (radice) e M (molteplicità); nel secondo esempio, che è una funzione razionale, compare un'ulteriore colonna in cui si specifica se la radice è del numeratore o del denominatore. Non serve scrivere i fattori privi di radice. In entrambi i casi, in alto a sinistra vi è il segno davanti alla funzione: ovviamente, quando davanti non c'è nulla, il segno è positivo.

$$24x^3 - 3x^5 - 48x = -3x^5 + 24x^3 - 48x = -(3x^5 - 24x^3 + 48x) = -3x(x^4 - 8x^2 + 16) = -3x(x^2 - 4)^2 = -3x(x - 2)^2(x + 2)^2$$

$$\frac{x^3 + 4x^5}{2 - 3x + x^2} = \frac{4x^5 + x^3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^3(4x^2 + 1)}{(x - 2)(x - 1)}$$

-	R	M
x	0	1
$(x-2)^2$	2	2
$(x+2)^2$	-2	2

+		R	M
x^3	N	0	3
$(x-2)$	D	2	1
$(x-1)$	D	-1	1