Ordinamento di un polinomio

Dato un polinomio, il suo ordinamento consiste nel disporre i monomi che lo compongono in maniera decrescente rispetto al grado. Da notare che se il coefficiente direttore, ossia quello di grado più alto (che con l'ordinamento diventa il primo) è positivo, non serve mettere il segno davanti.

$$-3-4x^2+2x^3+x=2x^3-4x^2+x-3 \qquad 5x^2-2-x^4=-x^4+5x^2-2$$

Nel caso di frazioni algebriche (rapporto tra due polinomi), numeratore e denominatore vengono ordinati indipendentemente l'uno dall'altro

$$\frac{1+3x^3-2x^2}{-2x-x^2+2}=\frac{3x^3-2x^2+1}{-x^2-2x+2} \qquad \frac{1-4x^2}{-2x+3x^2-2}=\frac{-4x^2+1}{3x^2-2x-2}$$

Estrazione del segno negativo

Questa operazione serve per evitare che il coefficiente direttore di un polinomio (il primo, se ordinato) sia negativo. In tal caso si scrive il segno negativo, seguito tra parentesi dal polinomio in cui tutti i segni vengono cambiati: in particolare il polinomio tra parentesi non inizierà con un segno negativo.

$$-5x^3+4x-3=-(5x^3-4x+3) \qquad -x^3-3x^2+2x+1=-(x^3+3x^2-2x-1)$$

Ecco due esempi in cui il polinomio viene prima ordinato:

$$3x-2x^3+1=-2x^3+3x+1=-(2x^3-3x-1) \qquad 2x^2+x-x^5-3x^4=-x^5-3x^4+2x^2+x=-(x^5+3x^4-2x^2-x)$$

Nel caso delle frazioni, il segno negativo va messo davanti alla linea di frazione, e non serve mettere tra parentesi il polinomio cambiato di segno. Se tale cambio di segno riguarda sia il numeratore che il denominatore, non si mette davanti alcun segno negativo (ne andrebbero messi due, ma si annullano).

$$\frac{-x^2-3x+1}{x+3}=-\frac{x^2+3x-1}{x+3} \qquad \frac{4x^2+3}{-x^2-5x}=-\frac{4x^2+3}{x^2+5x} \qquad \frac{-x+4}{-x^2-3}=\frac{x-4}{x^2+3}$$

Ecco due esempi in cui i termini della frazione vengono prima ordinati:

$$\frac{-3+4x^3}{-x+5}=\frac{4x^3-3}{-x+5}=-\frac{4x^3-3}{x-5} \qquad \frac{4-x-2x^2}{-1-x^3}=\frac{-2x^2-x+4}{-x^3-1}=\frac{2x^2+x-4}{x^3+1}$$

Da notare che questo è l'unico passaggio in cui numeratore e denominatore vanno visti nel loro insieme, in tutti gli altri i due termini verranno scomposti indipendentemente l'uno dall'altro.

Raccoglimento

Questa operazione viene effettuata dopo quelle viste in precedenza: si può quindi dare per scontato che il polinomio sia ordinato e non cominci con un segno negativo. In un polinomio può essere raccolta la parte letterale di grado più basso (l'ultimo, se il polinomio è ordinato) e moltiplicata per un polinomio (messo tra parentesi) ottenuto dividendo ognuno dei monomi che la compongono per il monomio raccolto (cioè sottrarre l'esponente). Se il polinomio è ordianto, il nuovo polinomio terminerà sicuramente con un termine noto (ossia senza lettera). Questa operazione non si può fare se il polinomio originale contiene un termine noto (come succede nell'ultimo dei seguenti esempi):

$$x^4 - x^2 + x = x(x^3 - x + 1) \qquad x^5 + x^3 + x^2 = x^2(x^3 + x + 1) \qquad x^3 + x^2 + 1$$

Può inoltre essere raccolto come coefficiente il massimo comune divisore fra i coefficienti (se è 1, in particolare se uno dei monomi è monico, è inutile raccoglierlo). Nel polinomio tra parentesi, ogni coefficiente viene diviso per il coefficiente raccolto. Ecco quattro esempi (nel primo possono essere raccolti un coefficiente e la x, nel secondo e nel terzo soltanto una delle due, nell'ultimo nulla).

$$6x^5-3x^4+9x^2 = 3x^2(2x^3-x^2+3) \qquad 6x^6+8x^3-4 = 2(3x^6+4x^3-2) \qquad 4x^3-x^2-2x = x(4x^2-x-2) \qquad 6x^2+2x+3$$

Ora alcuni esempi in cui il raccoglimento viene preceduto da una o entrambe le operazioni illustrate precedentemente: da notare che, se è stato estratto il segno negativo, esso va trascritto nel raccoglimento

$$-4x^3 + 8x^2 - 12x = -(4x^3 - 8x^2 + 12x) = -2x(2x^2 - 4x + 6) \qquad 3x^4 + 32 - 4x^3 = 3x^4 - 4x^3 + 32 = x^2(3x^2 - 4x + 3)$$

$$8x^2 - 16x - 12x^3 = -12x^3 + 8x^2 - 16x = -(12x^3 - 8x^2 + 16x) = -4x(3x^2 - 2x + 4)$$

Nelle frazioni il raccoglimento si effettua sui due polinomi indipendentemente l'uno dall'altro: se uno dei due non può essere scomposto, viene trascritto così come è (ma è utile scriverlo tra parentesi, per metterlo in evidenza)

$$\frac{-6x^3 + 2x^2}{9 + 3x} = \frac{-6x^3 + 2x^2}{3x + 9} = -\frac{6x^3 - 2x^2}{3x + 9} = -\frac{x^2(3x - 1)}{3(x + 3)} \qquad \frac{-12x^2 + 8x}{-5 - 2x} = -\frac{-12x^2 + 8x}{-2x - 5} = -\frac{12x^2 - 8x}{2x + 5} = -\frac{4x(3x - 2)}{(2x + 5)}$$

La fase successiva

Si noti prima di tutto che i monomi non sono scomponibili (al più si può raccogliere un segno negativo nelle frazioni). Da questo punto in poi, si scompone in maniera diversa a secondo del tipo di polinomio. Ne verranno mostrate due (fra le tantissime esistenti) nelle prossime sezioni, quelle sui trinomi monici e quelle sui binomi. Essendo comunque le operazioni viste finora le prime da svolgere, si darà per scontato, nei tipi di scomposizioni che verranno affrontate, che il binomio o trinomio

- Sia ordinato
- Finisca con un termine noto
- I coefficienti non hanno divisori comuni (a parte il divisore 1, ovviamente)

In tale situazione i polinomi di primo grado non sono scomponibili: verranno affrontati polinomi di secondo grado, per poi mostrare che quelle regole di scomposizione possono essere generalizzate a particolari binomi e trinomi il cui grado è una potenza di 2, ossia 4, 8, 16, ecc. Da notare che tutto quello che viene raccolto prima va poi trascritto anche nei passaggi succcessivi.