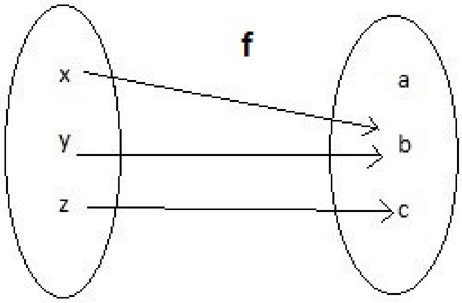
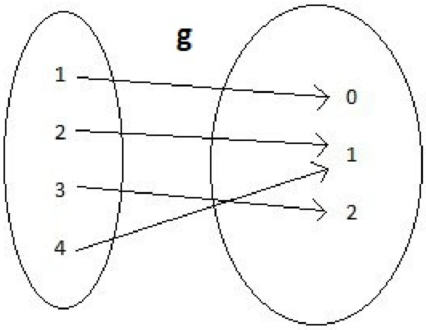
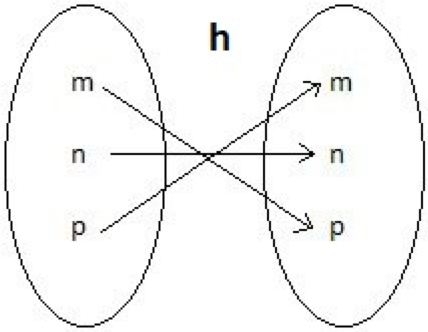
Funzioni

Dati due insiemi A e B una corrispondenza una funzione è una corrispondenza da A a B che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B. L'insieme di partenza viene chiamato *dominio*, quello di arrivo *codominio*. Ecco tre esempi di funzione rappresentate tramite diagramma:





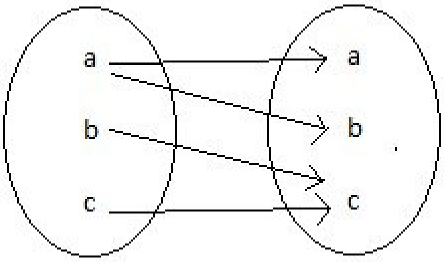


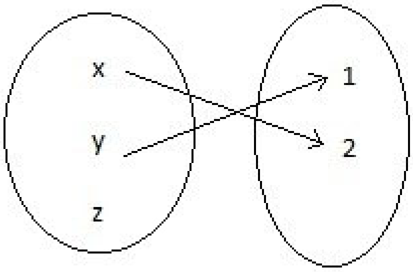
da notare che non ha importanza se ci sono elementi del codominio a cui non è associato alcun elemento del dominio o ne è associato più di uno. In pratica, se da un lato è obbligatorio che da ogni elemento di A parta una sola freccia, dall'altro nulla vieta che ci siano elementi di B su cui converge più di una freccia o non ne convergono affatto. Per ogni elemento a del dominio, l'unico elemento del codominio ad esso associato (quello, cioè, dove arriva la freccia che parte da a) viene definito come l'*immagine* di a. Se f è il nome della funzione (nelle tre raffigurazioni precedenti i nomi sono scritti fra i due insiemi, sopra le frecce) fra due insiemi A e B essa viene indicata con la notazione $f : A \to B$, e per ogni elemento a del dominio si definisce $f(a)$ l'immagine di a: da notare che questa definizione non avrebbe senso in una generica corrispondenza, in quanto tale $f(a)$ potrebbe non esistere oppure essercene più di uno. Una funzione f può essere definita per elencazione scrivendo, per ogni elemento a del dominio, $f(a) = ...$ mettendo appunto l'elemento del codominio associato ad a. forma f(a) = b. Ecco come sono definite per elencazione le tre funzioni precedentemente definite tramite diagramma:

$$f(x) = b \qquad f(y) = b \qquad f(z) = c \qquad\qquad g(m) = p \qquad g(n) = n \qquad g(p) = m$$

$$h(1) = 0 \qquad h(2) = 1 \qquad h(3) = 2 \qquad h(4) = 1$$

Ecco ora due esempi di corrispondenze che non sono funzioni:





La prima non è una funzione perché all'elemento a sono associati due elementi. La seconda perché all'elemento a non è associato alcun elemento. Tuttavia, in quest'ultimo caso, può diventarlo se il dominio viene ristretto al suo sottoinsieme formato dagli elementi collegati ad un elemento del codominio, ovvero l'insieme $\{x, y\}$. La sua rappresentazione per elencazione (chiamando f tale funzione) diventa

$$f(x) = 2 \qquad f(y) = 1$$

In pratica, quindi, se la condizione che ad ogni elemento del dominio non si possono associare più elementi del codominio è imprescindibile, la condizione che ad ogni elemento del dominio deve essere associato un elemento del codominio può essere resa ridefinendo il dominio escludendo eventuali elementi (come la z dell'esempio precedente) ai quali non è associato alcun elemento del codominio.

Funzioni naturali

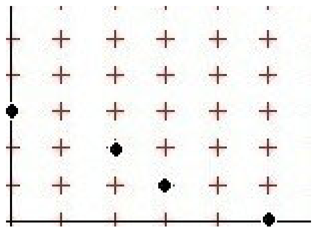
Quando il dominio e il codominio della funzione sono contenuti nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, la funzione si dice appunto *naturale*.
Funzioni di questo tipo possono essere rappresentate anche sul piano cartesiano, di cui in realtà se ne usa soltanto una parte: un quadrante che da un punto si espande verso l'alto e verso destra. Ognuno dei membri dell'elencazione (rappresentato, supponendo che la funzione abbia nome f, nella forma $f(x) = y$ per ognuno degli elementi x del dominio) viene rappresentato sul grafico dal punto (x, y) punto di coordinata orizzontale x e coordinata verticale y, che vale $f(x)$. In pratica si segue la regola:

$$f(\rightarrow) = \uparrow$$

In questo modo si può rappresentare graficamente una funzione naturale definita per elencazione, come in questo esempio:

$$g(0) = 3 \qquad g(2) = 2 \qquad g(3) = 1 \qquad g(5) = 0$$

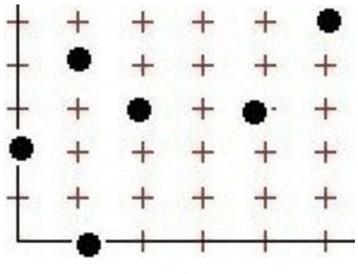
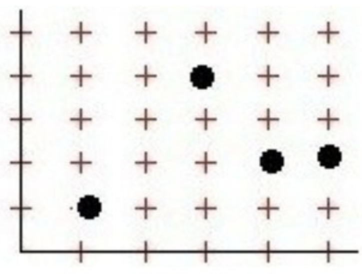
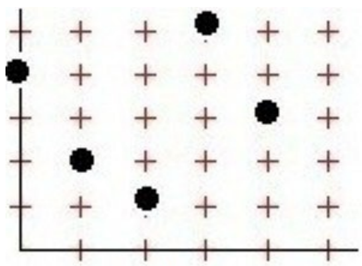
si rappresenta come



Viceversa, da una rappresentazione grafica si può passare ad una per elencazione, dopo aver verificato che sia effettivamente una funzione e quale sia il suo dominio.

- Il grafico rappresenta una funzione se non ci sono due punti sulla stessa verticale. Questo significa che, muovendosi in orizzontale e guardando in alto non bisogna mai vedere più di un punto.
- Il dominio è costutuito dagli elementi dell'asse orizzontale sulla cui verticale c'è un punto. Questo significa che, muovendosi in orizzontale e guardando in alto, un elemento di $\mathbb{N}$ appartiene al dominio se si vede un punto.
- Per ogni elemento del dominio, la sua immagine è l'altezza del punto sulla sua verticale.

Ecco tre esempi:

Grafico	 **f**	 **g**	 **h**
Dominio		$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$
Elencazione		$g(1) = 1$ $g(3) = 4$ $g(4) = 2$ $g(5) = 2$	$h(0) = 4$ $h(1) = 2$ $h(2) = 1$ $h(3) = 5$ $h(4) = 3$

Il grafico f non rappresenta una funzione perché ci sono due punti allineati verticalmente per $x = 1$.

Funzioni intere

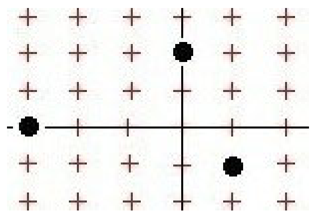
Quando il dominio e il codominio della funzione sono contenuti nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri naturali, la funzione si dice appunto *intera*.
Anche queste funzioni possono essere rappresentate sul piano cartesiano, ma anziché essere solo un quadrante questa volta viene usato per intero Ognuno dei membri dell'elencazione (rappresentato, supponendo che la funzione abbia nome f, nella forma $f(x) = y$ per ognuno degli elementi x del dominio) si rappresentato ancora con il punto (x, y) di coordinata orizzontale x (verso sinistra se negativo, verso destra se positivo) e coordinata verticale y (verso il basso se negativo, verso l'alto se positivo). In pratica si segue la regola:

$$f(\leftrightarrow) = \updownarrow$$

In questo modo si può rappresentare graficamente una funzione naturale definita per elencazione, come in questo esempio:

$$g(-3) = 0 \qquad g(0) = 2 \qquad g(1) = -1$$

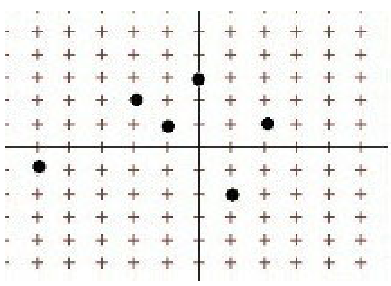
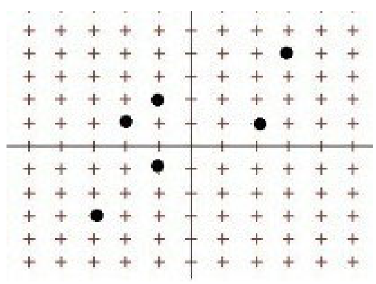
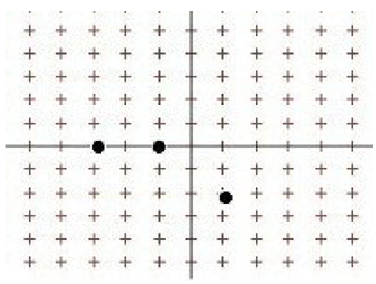
si rappresenta come



Viceversa, da una rappresentazione grafica si può passare ad una per elencazione, dopo aver verificato che sia effettivamente una funzione e quale sia il suo dominio.

- Il grafico rappresenta una funzione se non ci sono due punti sulla stessa verticale. Questo significa che, muovendosi in orizzontale e guardando in alto e in basso non bisogna mai vedere più di un punto.
- Il dominio è costutuito dagli elementi dell'asse orizzontale sulla cui verticale c'è un punto. Questo significa che, muovendosi in orizzontale e guardando sia in alto che in basso, un elemento di $\mathbb{N}$ appartiene al dominio se si vede un punto.
- Per ogni elemento del dominio, la sua immagine è l'altezza (positiva o negativa) del punto sulla sua verticale.

Ecco tre esempi:

Grafico			
Dominio	$\{-5, -2, -1, 0, 1, 2\}$		$\{-3, -1, 1\}$
Elencazione	$f(-5) = -1$ $f(-2) = 2$ $f(-1) = 1$ $f(0) = 3$ $f(1) = -2$ $f(2) = 1$		$h(-3) = 0$ $h(-1) = 0$ $h(1) = -2$

Il grafico g non rappresenta una funzione perché ci sono due punti allineati verticalmente per $x = -1$.